

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по образовательной деятельности КФУ  
проф. Таюрский Д.А.

"\_\_\_" 20\_\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Модули четырехсторонников и квазиконформные отображения

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2020

## **Содержание**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Насыров С.Р. (Кафедра математического анализа, отделение математики), Samyon.Nasyrov@kpfu.ru

## **1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

определение и основные факты теории гладких и негладких квазиконформных отображений.

Должен уметь:

использовать квазиконформные отображения при изучении граничных свойств конформных отображений.

Должен владеть:

методами экстремальных длин семейств кривых и использовать их на практике.

Должен демонстрировать способность и готовность:

Использовать методы теории конформных и квазиконформных отображений при исследовании поведения конформных инвариантов плоских областей. Оценивать конформные модули четырехсторонников и двусвязных областей методом экстремальных длин семейств кривых. Знать основные факты теории квазиконформных отображений и использовать их при анализе граничного поведения конформных отображений.

## **2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.09.04 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.01 "Математика (Математика)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 4 курсе в 8 семестре.

## **3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) на 108 часа(ов).

Контактная работа - 41 часа(ов), в том числе лекции - 20 часа(ов), практические занятия - 20 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 1 часа(ов).

Самостоятельная работа - 49 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 18 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 8 семестре.

## **4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

### **4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Конформные инварианты плоских областей	8	4	4	0	9
2.	Тема 2. Понятие гладкого плоского квазиконформного отображения	8	4	4	0	9
3.	Тема 3. Экстремальная длина семейства кривых	8	4	4	0	9
4.	Тема 4. Оценки конформных модулей областей	8	4	4	0	10
5.	Тема 5. Вариации конформных модулей	8	4	4	0	12

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
	Итого		20	20	0	49

#### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

##### Тема 1. Конформные инварианты плоских областей

Теорема Римана о конформном отображении и ее аналоги для двусвязных областей на плоскости. Конформное отображение плоской двусвязной области на кольцо. Конформное отображение четырехсторонника на плоскости на прямоугольник с сохранением отмеченных точек (вершин). Емкости Робена, их свойства и применение.

##### Тема 2. Понятие гладкого плоского квазиконформного отображения

Диффеоморфизмы на плоскости и их основные свойства. Гладкое квазиконформное отображение плоскости и его основные характеристики. Задача Греча. Искажение конформного модуляя прямоугольника при произвольном гладком квазиконформном отображении. Интеграл Дирихле и его основные свойства. Экстремум интеграла Дирихле.

##### Тема 3. Экстремальная длина семейства кривых

Экстремальная длина семейства плоских кривых. Вычисление экстремальных длин некоторых семейств кривых. Семейства кривых соединяющих противоположные стороны прямоугольника. Семейства кривых соединяющих и разделяющих граничные компоненты кругового кольца. Квазинвариантность экстремальных длин при квазиконформных отображениях.

##### Тема 4. Оценки конформных модулей областей

Двусторонние оценки конформных модулей четырехсторонников. Теоремы Альфорса и Варшавского. Применение в изучении поведения конформного отображения полуплоскости или круга на область с угловой точкой. Применение метода симметрии для изучения поведения модулей при неограниченном растяжении вдоль оси абсцисс (задача Вуоринена).

##### Тема 5. Вариации конформных модулей

Вариации конформных модулей четырехсторонников, двусвязных областей и емкостей Робена при гладком изменении границ плоской области. Вариационные формулы для конформных модулей. Применение Вариационных формул для конформных модулей исследованию задачи М.А.Лаврентьева о плоской дужке с максимальной подъемной силой.

#### 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержен приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996н/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

#### 6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС З++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Белошапка В.К.Курс лекций по комплексному анализу. -

<http://dmvn.mexmat.net/content/ccalculus/complexcalculus-6s-beloreshapka.pdf>

Гурвиц А., Курант Р. Теория Функций. М.,Наука - <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/GurvicKurant1968ru.djvu>

Домрин А.В.,Сергеев А.Г.Лекции по комплексному анализу. Ч.1. М - <http://www.mi.ras.ru/books/pdf/ser1.pdf>

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Перед занятием студенты должны повторить материал предыдущих лекций, освежить в памяти основные понятия, прочитать соответствующий в учебниках и учебных пособиях. Особое внимание стоит уделить определениям, теоремам и прочим утверждениям, которые нужно хорошо осознать и уверенно ими оперировать. При необходимости можно также решать задачи и упражнения.
практические занятия	Студенты перед занятием должны повторить теоретический материал по своим конспектам лекций, учебникам и учебным пособиям. Следует выполнить домашнее задание и, в случае необходимости, решать дополнительные задачи. При возникновении затруднений следует обратиться к преподавателю с просьбой объяснить непонятные места.
самостоятельная работа	При самостоятельной работе следует использовать все имеющиеся средства: конспекты лекций, материалы практических занятий, учебники и учебные пособия, материалы, находящиеся в сети Интернет. Особое внимание следует уделять творческому освоению курса, способности решать самостоятельно практические задания, а также доказывать простые факты и теоремы.

Вид работ	Методические рекомендации
экзамен	Студенту следует повторить все основные понятия курса, просмотреть решения всех задач, практических заданий. Основное внимание следует уделять определениям, формулировкам основных теорем и утверждений. Нельзя также повторять основные темы по курсу математического анализа, чтобы уверенно оперировать основными понятиями дифференциального и интегрального исчисления.

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

**11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

Компьютерный класс.

**12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи;
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачётке или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки "Математика".

**Приложение 2**

к рабочей программе дисциплины (модуля)  
**Б1.В.ДВ.09.04 Модули четырехсторонников и  
квазиконформные отображения**

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2020

**Основная литература:**

1. Авхадиев, Ф. Г. Введение в геометрическую теорию функций : [учебное пособие] / Ф. Г. Авхадиев . - Казань: Казанский университет, 2012. - 127 с. - URL:  
[http://kpfu.ru/portal/docs/F\\_896826336/Avhadiev.\\_Vvedenie.v.geometricheskiju.teoriju.funkcij.pdf](http://kpfu.ru/portal/docs/F_896826336/Avhadiev._Vvedenie.v.geometricheskiju.teoriju.funkcij.pdf)
2. Шабунин, М.И. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва: Лаборатория знаний, 2016. - 303 с. - ISBN 978-5-93208-209-6.- Текст: электронный// Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/84089>
3. Натанзон, С.М. Курс комплексного анализа : учебное пособие / С.М. Натанzon. - Москва : МЦНМО, 2012. - 48 с. - ISBN 978-5-4439-2030-6.- Текст: электронный// Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/56409>

**Дополнительная литература:**

1. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной: учебник / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов ; под редакцией В.А. Ильина. - 6-е изд. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 336 с. - ISBN 978-5-9221-0133-2.- Текст: электронный// Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/48167>
2. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник / И.И. Привалов. - 15-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2009. - 432 с. - ISBN 978-5-8114-0913-6.- Текст: электронный// Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/322>
3. Волковысский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие / Л.И. Волковысский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. - 4-е изд., перераб. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 312 с. - ISBN 5-9221-0264-8.- Текст: электронный// Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2763>

Приложение 3

к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.09.04 Модули четырехсторонников и  
квазиконформные отображения

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая  
перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2020

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "Консультант студента", доступ к которой предоставлен обучающимся. Многопрофильный образовательный ресурс "Консультант студента" является электронной библиотечной системой (ЭБС), предоставляющей доступ через сеть Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретенным на основании прямых договоров с правообладателями. Полностью соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования к комплектованию библиотек, в том числе электронных, в части формирования фондов основной и дополнительной литературы.