

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по образовательной деятельности КФУ  
проф. Таюрский Д.А.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## **Программа дисциплины**

Метод конечных элементов

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Прикладная математика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2020

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Даутов Р.З. (кафедра вычислительной математики, отделение прикладной математики и информатики), Rafail.Dautov@gmail.com

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-1	Способен осуществлять проведение работ по по обработке, анализу научно-технической информации и результатов исследований
ПК-2	Способен осуществлять выполнение экспериментов и и оформлять результаты исследований и разработок

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

теоретические знания о понятиях и задачах, связанных с аппроксимацией функциональных пространств Соболева.

Должен уметь:

понимать и применять на практике компьютерные технологии для решения различных задач линейной алгебры и уравнений задач математической физики

Должен владеть:

навыками самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с численным решением краевых задач математической физики методом конечных элементов.

Должен демонстрировать способность и готовность:

применять полученные знания и навыки в своей профессиональной деятельности

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.13.02 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.04 "Прикладная математика (Прикладная математика)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 4 курсе в 7 семестре.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 36 часа(ов), в том числе лекции - 0 часа(ов), практические занятия - 0 часа(ов), лабораторные работы - 36 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 72 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 7 семестре.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Метод конечных элементов для решения одномерных краевых задач	7	0	0	4	6

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
2.	Тема 2. Программная реализация МКЭ для одномерных краевых задач	7	0	0	6	12
3.	Тема 3. Метод конечных элементов для решения двумерных краевых задач	7	0	0	6	12
4.	Тема 4. Программная реализация МКЭ для двумерных краевых задач	7	0	0	8	20
5.	Тема 5. Комплекс MatLab функций pdeTool для решения краевых задач	7	0	0	12	22
	Итого		0	0	36	72

#### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

##### Тема 1. Метод конечных элементов для решения одномерных краевых задач

Формулировка первой краевой задачи для одномерного дифференциального уравнения второго порядка. Вывод интегрального тождества. Пространство лагранжевых сплайнов первой степени. Определение схемы метода конечных элементов (МКЭ). Единственность решения. Матричная формулировка схемы. Оценка точности решения

##### Тема 2. Программная реализация МКЭ для одномерных краевых задач

Данные о решаемой краевой задаче. Данные метода конечных элементов. Ортогональные полиномы и квадратуры типа Гаусса. Функции, связанные с базисным элементом. Алгоритмы и функции сборки и решения системы МКЭ. Построение графиков. Погрешность решения. Подготовка данных. Примеры тестовых задач. Решение тестовых задач.

##### Тема 3. Метод конечных элементов для решения двумерных краевых задач

Двумерная задача интерполяции Лагранжа. Разрешимость задачи интерполяции. Базис Лагранжа. Оператор интерполяции. Определение конечного элемента. Базисный конечный элемент. Лагранжев прямоугольный элемент степени  $m$ . Лагранжев треугольный конечный элемент степени  $m$ . Аффинно-эквивалентные конечные элементы. Пространство лагранжевых треугольных элементов степени  $m$ . Аппроксимация пространства Соболева первого порядка. Учет однородных краевых условий Дирихле. Конструкция базиса Лагранжа в пространстве конечных элементов. Определение схемы метода конечных элементов (МКЭ). Единственность решения. Матричная формулировка схемы. Оценка точности решения

##### Тема 4. Программная реализация МКЭ для двумерных краевых задач

Алгоритм формирования системы МКЭ. Алгоритм сборки для вычисления матрицы жесткости и вектора сил. Алгоритм решения задачи. Решение модельной задачи в MatLab. Определение геометрии области, построение P1 сеток. Кодировка P1 сеток. Создание и хранение разреженных матриц. Программирование рассылки элементов локальных матриц жесткости и сил. Расчетные формулы для P1 элементов. Способы задания коэффициентов уравнения. Учет краевых условий. Формирование системы МКЭ. Решение тестовой задачи.

##### Тема 5. Комплекс MatLab функций pdeTool для решения краевых задач

Оболочка комплекса pdeTool. О реализованных приложениях. Описание краевых и начально краевых задач математической физики, реализованных в pdeTool. Этапы решения краевых и начально краевых задач математической физики. Описание пункта меню задания геометрии области. Решение задач. Описание пункта меню задания уравнения и краевых условий. Описание пункта меню построения сетки. Экспорт данных в matlab. Описание пункта меню решения задачи. Описание пункта меню визуализации решения. Решение тестовых задач. Выполнение семестрового задания.

#### 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал образовательных математических ресурсов - <http://www.allmath.com/>

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лабораторные работы	Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины при выполнении лабораторной работы. Оцениваются владение материалом по теме работы, аналитические способности, владение методами, умения и навыки, необходимые для выполнения заданий.
самостоятельная работа	Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к зачету. При подготовке к сдаче зачета весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к зачету и экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.
экзамен	При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени. Кроме материала лекций рекомендуется использовать материалы из списка рекомендованной литературы

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

**11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Компьютерный класс.

**12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;

- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки "Прикладная математика".

### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Прикладная математика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2020

#### Основная литература:

1. Даутов, Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов: учебное пособие / Р. З. Даутов, М. М. Карчевский. - Казань: Казанский университет, 2012. - 240 с. - Текст : электронный. - URL: [http://kpfu.ru/publication?p\\_id=47325](http://kpfu.ru/publication?p_id=47325) (дата обращения: 21.05.2020).
2. Даутов Р.З. Метод Галеркина с возмущениями для задач на собственные значения: учебное пособие. - Казань: Казанский университет, 2010. - 94 с. - Текст : электронный. - URL: [http://kpfu.ru/publication?p\\_id=21045](http://kpfu.ru/publication?p_id=21045) (дата обращения: 21.05.2020).
3. Самогин, Ю. Н. Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов: учебное пособие / Ю. Н. Самогин, В. Е. Хроматов, В. П. Чирков ; под редакцией В. П. Чирков. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 200 с. - ISBN 978-5-9221-1380-9. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/59633> (дата обращения: 21.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

#### Дополнительная литература:

1. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. - 736 с. - ISBN 978-5-8114-0317-2. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/400> (дата обращения: 21.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Амосов, А. А. Вычислительные методы : учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2014. - 672 с. - ISBN 978-5-8114-1623-3. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/42190> (дата обращения: 21.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Срочко, В. А. Численные методы. Курс лекций : учебное пособие / В. А. Срочко. - Санкт-Петербург : Лань, 2010. - 208 с. - ISBN 978-5-8114-1014-9. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/378> (дата обращения: 21.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.



Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.13.02 Метод конечных элементов

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Прикладная математика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2020

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "Консультант студента", доступ к которой предоставлен обучающимся. Многопрофильный образовательный ресурс "Консультант студента" является электронной библиотечной системой (ЭБС), предоставляющей доступ через сеть Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретенным на основании прямых договоров с правообладателями. Полностью соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования к комплектованию библиотек, в том числе электронных, в части формирования фондов основной и дополнительной литературы.