

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



подписано электронно-цифровой подписью

**Программа дисциплины**  
**Многообразия алгебр М2.ДВ.2**

Направление подготовки: 010100.68 - Математика

Профиль подготовки: Алгебра

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Тронин С.Н.

**Рецензент(ы):**

Киндер М.И.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Арсланов М. М.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_г

Регистрационный No 817216814

Казань  
2014

## **Содержание**

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (доцент) Тронин С.Н. Кафедра алгебры и математической логики отделение математики, Serge.Tronin@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Курс предназначен для того, чтобы дать студентам общее представление если и не о структуре всей алгебре в целом, то о принципах организации достаточно существенной ее части. У большинства тем, излагаемых студентам-алгебраистам (группы, всевозможные кольца, модули, решетки и т.п.) имеется некая общая составляющая, своего рода общее ядро, и общий язык, на котором это ядро во всех случаях может быть описано. Этим языком является язык теории категорий и мультиоператорных алгебр (Омега-алгебр), как односортных, так и многосортных. Таким образом, цель - ознакомить студентов с основами теории категорий и функторов и основами теории многообразий универсальных алгебр, а следовательно, дать некоторое представление о некоторых существенных моментах, присущих большинству разделов алгебры. Кроме того, язык теории категорий и функторов будет полезен и в других разделах математики.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "М2.ДВ.2 Профессиональный" основной образовательной программы 010100.68 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 4 семестр.

Формально данный курс опирается только на знание основ теории множеств, но весьма желательно знание основ традиционной алгебры, в частности, теории групп, колец, решеток и т.п.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-5 (общекультурные компетенции)	способность порождать новые идеи
ОК-6 (общекультурные компетенции)	способностью работать самостоятельно, заботой о качестве, стремлением к успеху
ОК-8 (общекультурные компетенции)	инициативностью и лидерством
ПК-12 (профессиональные компетенции)	способность различным образом представлять и адаптировать математические знания с учетом уровня аудитории
ПК-15 (профессиональные компетенции)	возможность преподавания физико-математических дисциплин и информатики в общеобразовательных учреждениях, образовательных учреждениях начального профессионального, среднего профессионального и высшего профессионального образования на основе полученного фундаментального образования и научного мировоззрения
ПК-16 (профессиональные компетенции)	умение извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных журналов

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность к интенсивной научно-исследовательской и научно-исследовательской деятельности
ПК-6 (профессиональные компетенции)	самостоятельное построение целостной картины дисциплины

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

Основные понятия теории категорий. Примеры категорий, функторов и естественных преобразований. Основные понятия теории многообразий универсальных алгебр. Достаточный запас примеров многообразий.

2. должен уметь:

Необходимо умение интерпретировать конкретные алгебраические теории с точки зрения теории категорий и теории многообразий универсальных алгебр.

3. должен владеть:

Необходимо владение основами теоретико-категорного языка. Необходимо также владение языком понятий универсальной алгебры, и методами вычислений в различных конкретных ситуациях.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

основные понятия теории категорий и теории многообразий универсальных алгебр, и понимать, какое место занимают эти теории среди прочих разделов алгебры.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

применять эти знания в более специальных разделах алгебры.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

техническими приемами доказательств и решения задач из теории категорий и универсальной алгебры.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Категории, функторы и естественные преобразования. Произведения и копроизведения, ядра и коядра. Сопряженные функторы	4	1-4	4	8	0	домашнее задание
2.	Тема 2. Категория омега-алгебр. Абсолютно свободные алгебры (алгебры слов).	4	5	2	2	0	устный опрос
3.	Тема 3. Отношения эквивалентности и конгруэнции. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах.	4	6	2	0	0	устный опрос
4.	Тема 4. Многообразия омега-алгебр. Тождества. Теорема Биркгофа.	4	7-8	2	2	0	устный опрос
5.	Тема 5. Примеры многообразий: многообразия групп и решеток	4	9	0	2	0	контрольная работа
6.	Тема 6. Рациональная эквивалентность многообразий. Рациональная эквивалентность многообразий булевых алгебр и булевых колец.	4	10	0	2	0	домашнее задание
7.	Тема 7. Операторы и многообразия алгебр	4	11-14	2	4	0	реферат
8.	Тема 8. Многообразия линейных алгебр. Ассоциативные, коммутативные, лиевские, иордановы и альтернативные алгебры	4	15-16	0	4	0	домашнее задание
	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	экзамен
	Итого			12	24	0	

## 4.2 Содержание дисциплины

## **Тема 1. Категории, функторы и естественные преобразования. Произведения и копроизведения, ядра и коядра. Сопряженные функторы**

### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Категории, функторы и естественные преобразования. Произведения и копроизведения, ядра и коядра. Сопряженные функторы

### **практическое занятие (8 часа(ов)):**

Решение задач. Типы задач: проверка свойства быть категорией, проверка свойства быть функтором, проверка свойства быть естественным преобразованием, проверка сопряженности (или не сопряженности) функторов.

## **Тема 2. Категория омега-алгебр. Абсолютно свободные алгебры (алгебры слов).**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Категория омега-алгебр. Абсолютно свободные алгебры (алгебры слов).

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Решение задач. Вычисление валентности слов, и проверка свойства слова быть (или не быть) элементом омега-алгебры.

## **Тема 3. Отношения эквивалентности и конгруэнции. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах.**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Отношения эквивалентности и конгруэнции. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах.

## **Тема 4. Многообразия омега-алгебр. Тождества. Теорема Биркгофа.**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Многообразия омега-алгебр. Тождества. Теорема Биркгофа

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Решение задач. Типы задач: различные примеры тождеств, следствия из этих тождеств, различные примеры многообразий, задаваемых теми или иными конкретными тождествами. Типы данных в языках программирования как алгебры в некоторых многообразиях.

## **Тема 5. Примеры многообразий: многообразия групп и решеток**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Решение задач. Исследование примеров разрешимых, нильпотентных, метабелевых, и абелевых групп. Вывод тождеств, являющихся следствиями из тождеств, определяющих многообразия разрешимых, нильпотентных, и метабелевых групп. Доказательство тождеств, эквивалентных тождеству дистрибутивности в решетке, и свойству, определяющему дедекиндовость решетки.

## **Тема 6. Рациональная эквивалентность многообразий. Рациональная эквивалентность многообразий булевых алгебр и булевых колец.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Решение задач, являющихся этапами доказательства теоремы о рациональной эквивалентности многообразий булевых алгебр и булевых колец.

## **Тема 7. Операды и многообразия алгебр**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Операды и многообразия алгебр. Определения, примеры. Построение свободных алгебр.

### **практическое занятие (4 часа(ов)):**

Разбор примеров. Отчеты по рефератам. Темы рефератов - примеры операд и алгебр над ними.

## **Тема 8. Многообразия линейных алгебр. Ассоциативные, коммутативные, лиевские, йордановы и альтернативные алгебры**

### **практическое занятие (4 часа(ов)):**

Разбор примеров. Решение задач. Темы задач: примеры лиевских, йордановых и альтернативных алгебр. Подробное исследование алгебр кватернионов и октонионов (чисел Кэли).

### 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Категории, функторы и естественные преобразования. Произведения и копроизведения, ядра и коядра. Сопряженные функторы	4	1-4	подготовка домашнего задания	24	домашнее задание
2.	Тема 2. Категория омега-алгебр. Абсолютно свободные алгебры (алгебры слов).	4	5	подготовка к устному опросу	8	устный опрос
3.	Тема 3. Отношения эквивалентности и конгруэнции. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах.	4	6	подготовка к устному опросу	8	устный опрос
4.	Тема 4. Многообразия омега-алгебр. Тожества. Теорема Биркгофа.	4	7-8	подготовка к устному опросу	10	устный опрос
5.	Тема 5. Примеры многообразий: многообразия групп и решеток	4	9	подготовка к контрольной работе	10	контрольная работа
6.	Тема 6. Рациональная эквивалентность многообразий. Рациональная эквивалентность многообразий булевых алгебр и булевых колец.	4	10	подготовка домашнего задания	10	домашнее задание
7.	Тема 7. Операторы и многообразия алгебр	4	11-14	подготовка к реферату	20	реферат
Итого					90	

### 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

активные и интерактивные формы, лекции, практические занятия, доклады на семинарах, рефераты, зачет. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. Предлагаются также домашние задания, за которые выставляются баллы. Допуск к зачету производится после выполнения обязательного минимума заданий соответственно количеству набранных баллов.

### 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов



## **Тема 1. Категории, функторы и естественные преобразования. Произведения и копроизведения, ядра и коядра. Сопряженные функторы**

домашнее задание , примерные вопросы:

Категории, функторы и естественные преобразования. Произведения и копроизведения, ядра и коядра. Сопряженные функторы

## **Тема 2. Категория омега-алгебр. Абсолютно свободные алгебры (алгебры слов).**

устный опрос , примерные вопросы:

Категория омега-алгебр. Абсолютно свободные алгебры (алгебры слов).

## **Тема 3. Отношения эквивалентности и конгруэнции. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах.**

устный опрос , примерные вопросы:

Отношения эквивалентности и конгруэнции. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах

## **Тема 4. Многообразия омега-алгебр. Тожества. Теорема Биркгофа.**

устный опрос , примерные вопросы:

Многообразия омега-алгебр. Тожества. Теорема Биркгофа.

## **Тема 5. Примеры многообразий: многообразия групп и решеток**

контрольная работа , примерные вопросы:

Примеры многообразий: многообразия групп и решеток

## **Тема 6. Рациональная эквивалентность многообразий. Рациональная эквивалентность многообразий булевых алгебр и булевых колец.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Рациональная эквивалентность многообразий. Рациональная эквивалентность многообразий булевых алгебр и булевых колец.

## **Тема 7. Опералы и многообразия алгебр**

реферат , примерные темы:

Опералы и многообразия алгебр

## **Тема 8. Многообразия линейных алгебр. Ассоциативные, коммутативные, лиевские, иордановы и альтернативные алгебры**

## **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

Приложение 1. Вопросы к зачету.

1. Категории. Примеры категорий. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Прямые произведения и копроизведения. Частично упорядоченные множества как категории.
2. Ковариантные и контравариантные функторы. Примеры функторов. Естественные преобразования. Примеры естественных преобразований.
3. Сопряженные функторы. Единственность функтора, обладающего сопряженным справа функтором. Примеры сопряженных функторов.
4. Категория  $\Omega$ -алгебр. Примеры  $\Omega$ -алгебр. Подалгебры, гомоморфные образы и прямые произведения в этой категории. Подалгебра, порожденная данным подмножеством. Решетки подалгебр. Определение многообразия алгебр. Примеры многообразий.
5. Абсолютно свободные алгебры (алгебры  $\Omega$ -слов). Построение, универсальное свойство (предполагая известной однозначность записи  $\Omega$ -слов), и единственность (с точностью до изоморфизма).
6. Однозначность записи  $\Omega$ -слов. Валентность.
7. Отношения эквивалентности и конгруэнции. Решетка конгруэнций. Конгруэнции и ядра гомоморфизмов. Факторалгебры. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах для мультиоператорных алгебр.



8. Конгруэнции на группах и их связь с нормальными подгруппами. Факторалгебры групп по конгруэнциям - то же самое, что факторгруппы по соответствующим нормальным подгруппам.
9. Многообразия  $\Omega$ -алгебр. Примеры. Построение свободных в данном многообразии алгебр. Свойства свободных алгебр. Функтор свободной алгебры и его сопряженность слева к забывающему функтору.
10. Тождества. Многообразия, определяемые тождествами. Примеры.
11. Теорема Биркгофа об эквивалентности двух способов задания многообразий алгебр.
12. Рациональная эквивалентность. Пример: булевы алгебры и булевы кольца.
13. Многообразия линейных алгебр. Примеры.
14. Операторы и алгебры над операторами. Примеры операторов и многообразий алгебр над операторами.

### 7.1. Основная литература:

Теория групп и ее применение к физическим проблемам : перевод с английского / М. Хамермеш ; Пер. Ю. А. Данилова .? Издание 3-е .? Москва : Либроком, 2010 .? 584 с.

Теория представлений групп / М. А. Наймарк .? Изд. 2-е .? Москва : Физматлит, 2010 .? 572 с.

Теория представлений групп / М. А. Наймарк .? Изд. 2-е .? Москва : Физматлит, 2010 .? 572 с.  
<http://e.lanbook.com/view/book/2751/page89/>

Манин Ю.И., Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел. - М.: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2009. - 552 с.  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9368](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9368)

### 7.2. Дополнительная литература:

Сборник задач по алгебре / [И. В. Аржанцев и др.] ; под ред. А. И. Кострикина .? [Новое изд., испр.] .? Москва : Изд-во МЦНМО, 2009 .? 403 с.

Сизый С.В. Лекции по теории чисел. 2-е изд., испр. и доп - М.: "Физматлит", 2008. -192 с.  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2319](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2319)

### 7.3. Интернет-ресурсы:

Аграновский А.В., Хади Р.А. Практическая криптография: алгоритмы и их программирование. \_ М.: Издательский дом ?СОЛОН-ПРЕСС?, 2009. ? 257 с. -  
<http://www.bibliorossica.com/book.html?currBookId=10512>

Баранова Е.К., Бабаш А.В. Информационная безопасность и защита информации : учебное пособие. ? М.: Евразийский открытый институт, 2012. ? 311 с. -  
<http://www.bibliorossica.com/book.html?currBookId=6182>

Манин Ю.И. , Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел. - М.: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2009. - 552 с. -  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=9368](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9368)

Сизый С.В. Лекции по теории чисел. 2-е изд., испр. и доп - М.: -  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2319](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2319)

Теория представлений групп / М. А. Наймарк .? Изд. 2-е .? Москва : Физматлит, 2010 .? 572 с. -  
<http://e.lanbook.com/view/book/2751/page89/>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Многообразия алгебр" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "БиблиоРоссика", доступ к которой предоставлен студентам. В ЭБС "БиблиоРоссика" представлены коллекции актуальной научной и учебной литературы по гуманитарным наукам, включающие в себя публикации ведущих российских издательств гуманитарной литературы, издания на английском языке ведущих американских и европейских издательств, а также редкие и малотиражные издания российских региональных вузов. ЭБС "БиблиоРоссика" обеспечивает широкий законный доступ к необходимым для образовательного процесса изданиям с использованием инновационных технологий и соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий, библиотека, доступ студентов к Интернету. Часть литературы предоставляется студентам в электронном виде лектором.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010100.68 "Математика" и магистерской программе Алгебра .

Автор(ы):

Тронин С.Н. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Киндер М.И. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.