

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт физики



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Дискретная математика БЗ.ДВ.7

Направление подготовки: 011800.62 - Радиофизика

Профиль подготовки: Радиофизические методы по областям применения (Радиофизические измерения)

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Иваньшин П.Н.

**Рецензент(ы):**

Попов А.А.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Сушков С. В.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_\_ от "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института физики:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_\_ от "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2016

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Иваньшин П.Н. Кафедра геометрии отделение математики , Pyotr.Ivanshin@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Студенты, завершившие изучение данной дисциплины, должны:

- \* знать основные положения теории графов и теории чисел;
- \* овладеть методами решения соответствующих задач;
- \* уметь использовать эти методы при работе с конкретными приложениями и программами.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б3.ДВ.7 Профессиональный" основной образовательной программы 011800.62 Радиофизика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 1, 2 курсах, 2, 3, 4 семестры.

Курс лекций "Дискретная математика" состоит из разделов: Теория графов и Основы теории чисел.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-12 (общекультурные компетенции)	навыки работы с компьютером
ОК-15 (общекультурные компетенции)	способность к письменной и устной коммуникации на русском языке
ОК-16 (общекультурные компетенции)	знание иностранного языка
ПК-1 (профессиональные компетенции)	определение общих форм, закономерностей и инструментальных средств отдельной предметной области
ПК-2 (профессиональные компетенции)	умение понять поставленную задачу
ПК-3 (профессиональные компетенции)	умение формулировать результат
ПК-4 (профессиональные компетенции)	умение строго доказать утверждение
ПК-5 (профессиональные компетенции)	умение на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

знать основные положения теории графов и теории чисел;

2. должен уметь:

уметь использовать эти методы при работе с конкретными приложениями и программами.

3. должен владеть:

овладеть методами решения соответствующих задач;

Решать основные задачи теории графов и теории чисел, уметь находить основные характеристики графа, решать линейные и квадратичные сравнения

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных(ые) единиц(ы) 180 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины отсутствует во 2 семестре; зачет в 3 семестре; зачет в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Понятие графа. Орграф, мультиграф. Лемма о рукопожатиях. Операции над графами.	2	1	0	4	0	устный опрос
2.	Тема 2. Связность графов. Цепи, маршруты, циклы. Связность, реберная связность. Компоненты графа.	2	2	0	4	0	устный опрос
3.	Тема 3. Расстояние в графах. Понятия: радиус, диаметр, обхват, окружение и их свойства. Задача коммивояжера.	2	3	0	5	0	устный опрос

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
4.	Тема 4. Деревья и леса. Эквивалентные определения дерева. Классификация деревьев. Существование остовного дерева.	2	4	0	5	0	устный опрос
5.	Тема 5. Обходы графов. Гамильтоновы и Эйлеровы графы. Теоремы Дирака и Эйлера.	3	5	4	10	0	устный опрос
6.	Тема 6. Линейная алгебра на графах. Матрицы инцидентности и смежности. Пространства циклов и разрезов графов. Индуцированные циклы и минимальные разрезы.	3	6	4	10	0	устный опрос
7.	Тема 7. Реализация графов. Реализация графов в $R^3$ . Планарные графы. Теорема Куратовского. Формула Эйлера и ее следствия. Плоско-двойственные графы.	3	7	4	8	0	устный опрос
8.	Тема 8. Раскрашивание графов Теоремы о 5-и и 4-х красках. Раскрашивание вершин, ребер и граней. Оценки раскрашиваемости.	3	8	6	8	0	контрольная работа
9.	Тема 9. Простые числа. Простые и составные числа. Делимость. Свойства делителей.	4	9	0	2	0	устный опрос
10.	Тема 10. Основная теорема арифметики. Существование и единственность разложения.	4	10	0	2	0	устный опрос

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
11.	Тема 11. Алгоритм деления. Алгоритм Евклида. Признаки делимости.	4	11	0	2	0	устный опрос
12.	Тема 12. Совершенные числа. Числа Ферма и Мерсенна. Теорема о связи чисел Мерсенна и совершенных чисел.	4	12	0	2	0	устный опрос
13.	Тема 13. Сравнения. Понятие сравнения, свойства сравнений. Кольцо $Z_n$ и группа $U_n$ . Системы вычетов.	4	13	0	2	0	устный опрос
14.	Тема 14. Дальнейшие свойства сравнений. Полиномиальные сравнения. Функции Эйлера и Ферма. Китайская теорема об остатках. Малая теорема Ферма.	4	14	0	2	0	устный опрос
15.	Тема 15. Большая теорема Ферма. Случаи степеней 2 (пифагоровы тройки), 3, 4.	4	15	0	3	0	устный опрос
16.	Тема 16. Приложения теории чисел --- RSA-шифрование, вычисление остатков от деления, схема Диффи-Хелмана.	4	16	0	3	0	контрольная работа
	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	зачет
	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	зачет
	Итого			18	72	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Понятие графа. Орграф, мультиграф. Лемма о рукопожатиях. Операции над графами.**

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Орграф, мультиграф. Лемма о рукопожатиях. Операции над графами. Изоморфизмы графов. В этой теме формулируются основные понятия теории графов. Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. стр.43

## **Тема 2. Связность графов. Цепи, маршруты, циклы. Связность, реберная связность. Компоненты графа.**

### ***практическое занятие (4 часа(ов)):***

Цепи, маршруты, циклы. Связность, реберная связность. Компоненты графа. Сильная связность в орграфах. Лемма о существовании простой цепи Теорема о разрыве цикла  
Практика: Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. стр.43

## **Тема 3. Расстояние в графах. Понятия: радиус, диаметр, обхват, окружение и их свойства. Задача коммивояжера.**

### ***практическое занятие (5 часа(ов)):***

Расстояние в графах: определения Понятия: радиус, диаметр, обхват, окружение и их свойства. Задача коммивояжера. Теорема о радиусе и диаметре Задача китайского почтальона Практика: Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. стр.44

## **Тема 4. Деревья и леса. Эквивалентные определения дерева. Классификация деревьев. Существование остовного дерева.**

### ***практическое занятие (5 часа(ов)):***

Деревья и леса. Эквивалентные определения дерева. Классификация деревьев. Существование остовного дерева. Теорема о мостах Теорема о точке сочленения Практика: Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. стр.44

## **Тема 5. Обходы графов. Гамильтоновы и Эйлеровы графы. Теоремы Дирака и Эйлера.**

### ***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Обходы графов. Гамильтоновы и Эйлеровы графы. Теоремы Дирака, Оре и Эйлера. Алгоритм Флери. Обобщенные точки сочленения Теорема о необходимом условии гамильтоновости

### ***практическое занятие (10 часа(ов)):***

Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. стр.44

## **Тема 6. Линейная алгебра на графах. Матрицы инцидентности и смежности. Пространства циклов и разрезов графов. Индуцированные циклы и минимальные разрезы.**

### ***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Линейная алгебра на графах. Матрицы инцидентности и смежности. Пространства циклов и разрезов графов. Индуцированные циклы и минимальные разрезы. Теорема о соответствии между матрицами инцидентности и смежности Теорема о ядре матрицы инцидентности

### ***практическое занятие (10 часа(ов)):***

Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. стр.44

## **Тема 7. Реализация графов. Реализация графов в $R^3$ . Планарные графы. Теорема Куратовского. Формула Эйлера и ее следствия. Плоско-двойственные графы.**

### ***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Реализация графов. Теорема об укладке графа на сфере Укладка графа на торе Реализация графов в  $R^3$ . Планарные графы. Формула Эйлера и ее следствия. Плоско-двойственные графы. Теорема Куратовского. Необходимые и достаточные условия планарности графов степени 3 и 4.

### ***практическое занятие (8 часа(ов)):***

Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. стр.44

## **Тема 8. Раскрашивание графов Теоремы о 5-и и 4-х красках. Раскрашивание вершин, ребер и граней. Оценки раскрашиваемости.**

### ***лекционное занятие (6 часа(ов)):***

Раскрашивание графов Теоремы о 5-и и 4-х красках. Раскрашивание вершин, ребер и граней. Оценки раскрашиваемости. Теорема Аппеля и Хакена

### ***практическое занятие (8 часа(ов)):***

Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. стр.45

## **Тема 9. Простые числа. Простые и составные числа. Делимость. Свойства делителей.**

### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Простые и составные числа. Делимость. Свойства делителей. Примеры и приложения делителей в арифметике и теории полиномов. КОРЕШКОВ Н.А., НАСРУТДИНОВ М.Ф., СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. стр. 4

**Тема 10. Основная теорема арифметики. Существование и единственность разложения.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Основная теорема арифметики. Существование и единственность разложения числа на сомножители. Примеры разложений. КОРЕШКОВ Н.А., НАСРУТДИНОВ М.Ф., СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. стр. 4

**Тема 11. Алгоритм деления. Алгоритм Евклида. Признаки делимости.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Алгоритм деления. Алгоритм Евклида. Признаки делимости. Приложения алгоритма в криптографии. КОРЕШКОВ Н.А., НАСРУТДИНОВ М.Ф., СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. стр. 5

**Тема 12. Совершенные числа. Числа Ферма и Мерсенна. Теорема о связи чисел Мерсенна и совершенных чисел.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Совершенные числа. Числа Ферма и Мерсенна. Теорема о связи чисел Мерсенна и совершенных чисел. Теорема о построении правильного многоугольника. КОРЕШКОВ Н.А., НАСРУТДИНОВ М.Ф., СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. стр. 7

**Тема 13. Сравнения. Понятие сравнения, свойства сравнений. Кольцо  $Z_n$  и группа  $U_n$ . Системы вычетов.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Понятие сравнения, свойства сравнений. Кольцо  $Z_n$  и группа  $U_n$ . Системы вычетов. Решение линейных уравнений и систем вычетов. КОРЕШКОВ Н.А., НАСРУТДИНОВ М.Ф., СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. стр. 10

**Тема 14. Дальнейшие свойства сравнений. Полиномиальные сравнения. Функции Эйлера и Ферма. Китайская теорема об остатках. Малая теорема Ферма.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Дальнейшие свойства сравнений. Полиномиальные сравнения. Функции Эйлера и Ферма. Китайская теорема об остатках. Доказательство теоремы. Малая теорема Ферма. Приложения малой теоремы Ферма. КОРЕШКОВ Н.А., НАСРУТДИНОВ М.Ф., СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. стр. 13

**Тема 15. Большая теорема Ферма. Случаи степеней 2 (пифагоровы тройки), 3, 4.**

**практическое занятие (3 часа(ов)):**

Большая теорема Ферма. История доказательства. Случаи степеней 2 (пифагоровы тройки), 3, 4. Описание доказательства, метод бесконечного спуска.

**Тема 16. Приложения теории чисел --- RSA-шифрование, вычисление остатков от деления, схема Диффи-Хелмана.**

**практическое занятие (3 часа(ов)):**

Приложения теории чисел --- RSA-шифрование, вычисление остатков от деления, схема Диффи-Хелмана. Приложение к криптографии. Примеры шифрования и дешифрования чисел. КОРЕШКОВ Н.А., НАСРУТДИНОВ М.Ф., СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. стр. 12

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**



N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Понятие графа. Орграф, мультиграф. Лемма о рукопожатиях. Операции над графами.	2	1	подготовка к устному опросу	3	устный опрос
2.	Тема 2. Связность графов. Цепи, маршруты, циклы. Связность, реберная связность. Компоненты графа.	2	2	подготовка к устному опросу	2	устный опрос
3.	Тема 3. Расстояние в графах. Понятия: радиус, диаметр, обхват, окружение и их свойства. Задача коммивояжера.	2	3	подготовка к устному опросу	4	устный опрос
4.	Тема 4. Деревья и леса. Эквивалентные определения дерева. Классификация деревьев. Существование остовного дерева.	2	4	подготовка к устному опросу	4	устный опрос
5.	Тема 5. Обходы графов. Гамильтоновы и Эйлеровы графы. Теоремы Дирака и Эйлера.	3	5	подготовка к устному опросу	4	устный опрос
6.	Тема 6. Линейная алгебра на графах. Матрицы инцидентности и смежности. Пространства циклов и разрезов графов. Индуцированные циклы и минимальные разрезы.	3	6	подготовка к устному опросу	5	устный опрос
7.	Тема 7. Реализация графов. Реализация графов в $R^3$ . Планарные графы. Теорема Куратовского. Формула Эйлера и ее следствия. Плоско-двойственные графы.	3	7	подготовка к устному опросу	5	устный опрос

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
8.	Тема 8. Раскрашивание графов Теоремы о 5-и и 4-х красках. Раскрашивание вершин, ребер и граней. Оценки раскрашиваемости.	3	8	подготовка к контрольной работе	5	контрольная работа
9.	Тема 9. Простые числа. Простые и составные числа. Делимость. Свойства делителей.	4	9	подготовка к устному опросу	5	устный опрос
10.	Тема 10. Основная теорема арифметики. Существование и единственность разложения.	4	10	подготовка к устному опросу	5	устный опрос
11.	Тема 11. Алгоритм деления. Алгоритм Евклида. Признаки делимости.	4	11	подготовка к устному опросу	5	устный опрос
12.	Тема 12. Совершенные числа. Числа Ферма и Мерсенна. Теорема о связи чисел Мерсенна и совершенных чисел.	4	12	подготовка к устному опросу	5	устный опрос
13.	Тема 13. Сравнения. Понятие сравнения, свойства сравнений. Кольцо $Z_n$ и группа $U_n$ . Системы вычетов.	4	13	подготовка к устному опросу	5	устный опрос
14.	Тема 14. Дальнейшие свойства сравнений. Полиномиальные сравнения. Функции Эйлера и Ферма. Китайская теорема об остатках. Малая теорема Ферма.	4	14	подготовка к устному опросу	5	устный опрос
15.	Тема 15. Большая теорема Ферма. Случаи степеней 2 (пифагоровы тройки), 3, 4.	4	15	подготовка к устному опросу	5	устный опрос
16.	Тема 16. Приложения теории чисел --- RSA-шифрование, вычисление остатков от деления, схема Диффи-Хелмана.	4	16	подготовка к контрольной работе	5	контрольная работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
	Итого				72	

### 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Применение проектора и ноутбука для чтения лекций.

### 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

#### Тема 1. Понятие графа. Орграф, мультиграф. Лемма о рукопожатиях. Операции над графами.

устный опрос , примерные вопросы:

Определить тип предъявленного графа. Найти произведение, сумму, связную сумму графов

#### Тема 2. Связность графов. Цепи, маршруты, циклы. Связность, реберная связность. Компоненты графа.

устный опрос , примерные вопросы:

Найти у предъявленного графа связность, реберную связность

#### Тема 3. Расстояние в графах. Понятия: радиус, диаметр, обхват, окружение и их свойства. Задача коммивояжера.

устный опрос , примерные вопросы:

Найти между вершинами предъявленного графа расстояние

#### Тема 4. Деревья и леса. Эквивалентные определения дерева. Классификация деревьев. Существование остовного дерева.

устный опрос , примерные вопросы:

Найти остовное дерево графа (2 алгоритма)

#### Тема 5. Обходы графов. Гамильтоновы и Эйлеровы графы. Теоремы Дирака и Эйлера.

устный опрос , примерные вопросы:

Определить, гамильтонов или эйлеров ли граф

#### Тема 6. Линейная алгебра на графах. Матрицы инцидентности и смежности.

#### Пространства циклов и разрезов графов. Индуцированные циклы и минимальные разрезы.

устный опрос , примерные вопросы:

Найти базис пространств разрезов и циклов графа

#### Тема 7. Реализация графов. Реализация графов в $R^3$ . Планарные графы. Теорема Куратовского. Формула Эйлера и ее следствия. Плоско-двойственные графы.

устный опрос , примерные вопросы:

Определить планарность графа, найти плоско-двойственный граф

#### Тема 8. Раскрашивание графов Теоремы о 5-и и 4-х красках. Раскрашивание вершин, ребер и граней. Оценки раскрашиваемости.

контрольная работа , примерные вопросы:

Найти хроматические числа графа

#### Тема 9. Простые числа. Простые и составные числа. Делимость. Свойства делителей.

устный опрос , примерные вопросы:

Разложить число на сомножители, доказать неограниченность множества простых чисел

#### Тема 10. Основная теорема арифметики. Существование и единственность разложения.

устный опрос , примерные вопросы:

Найти разложение числа на множители

**Тема 11. Алгоритм деления. Алгоритм Евклида. Признаки делимости.**

устный опрос , примерные вопросы:

Уметь применять алгоритм Евклида к данной паре чисел

**Тема 12. Совершенные числа. Числа Ферма и Мерсенна. Теорема о связи чисел Мерсенна и совершенных чисел.**

устный опрос , примерные вопросы:

Проверить возможность построения правильного многоугольника при помощи циркуля и линейки

**Тема 13. Сравнения. Понятие сравнения, свойства сравнений. Кольцо  $Z_n$  и группа  $U_n$ . Системы вычетов.**

устный опрос , примерные вопросы:

Найти все подгруппы  $Z_n$  и  $U_n$ . Найти порядок числа в  $Z_n$

**Тема 14. Дальнейшие свойства сравнений. Полиномиальные сравнения. Функции Эйлера и Ферма. Китайская теорема об остатках. Малая теорема Ферма.**

устный опрос , примерные вопросы:

Уметь решать линейные и квадратные сравнения. Найти значения функций Эйлера и Ферма на данном числе

**Тема 15. Большая теорема Ферма. Случаи степеней 2 (пифагоровы тройки), 3, 4.**

устный опрос , примерные вопросы:

Уметь находить произвольно большую пифагорову тройку

**Тема 16. Приложения теории чисел --- RSA-шифрование, вычисление остатков от деления, схема Диффи-Хелмана.**

контрольная работа , примерные вопросы:

Уметь применить схему Диффи-Хелмана для данной пары чисел

**Тема . Итоговая форма контроля**

**Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету:

Число ребер  $K^n$ .

2. Кубический граф. Пусть  $d \in \mathbb{N}$  и  $V = \{0, 1\}^d$ . Ребро соединяет две вершины  $V$  тогда и только тогда, когда число разных координат двух вершин равно 1. Найти

2.1. число ребер;

2.2. степень;

2.3. диаметр;

2.4. радиус такого графа.

3. Показать, что  $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2 \mathrm{rad}(G)$ .

4. Показать, что каждый двусвязный граф содержит цикл.

5. Найти  $k(G)$  и  $\lambda(G)$  для

5.1.  $P^k$ ;

5.2.  $C^k$ ;

5.3.  $K^k$ ;

5.4.  $K_{m, n}$ .

6. Найти связность  $n$ -мерного куба.

7. Доказать, что для любого нетривиального графа  $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ .

8. Существует ли такая функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что для каждого  $k \in \mathbb{N}$  граф минимальной степени  $f(k)$   $k$ -связен?
9. Доказать, что каждое дерево  $T$  имеет как минимум  $\Delta(T)$  листьев.
10. Доказать, что "древесный порядок", ассоциированный с корневым деревом  $T$  действительно определяет отношение частичного порядка на  $V(T)$ .
11. Пусть  $G$  --- связный граф, и  $r \in V(G)$ . Начиная с  $r$  перейдем вдоль ребра графа  $G$  к еще не посещенной вершине. Если такой вершины нет, возвращаемся по ребру, которое было пройдено при первом посещении вершины. Остановка при повторном посещении  $r$ . Доказать, что пройденные ребра составляют нормальное дерево графа  $G$  с корнем  $r$ .
12. Пусть  $\mathcal{T}$  --- такое семейство поддеревьев дерева  $T$ , что попарное пересечение любых двух непусто. Доказать, что тогда и пересечение всех таких поддеревьев непусто.
13. Доказать, что каждый автоморфизм дерева оставляет неподвижным минимум одну либо вершину, либо ребро (или и то и другое).
14. Всегда ли классы разбиения регулярного двусоставного графа одного размера?
15. Доказать, что граф двусоставен тогда и только тогда, когда каждый индуцированный цикл имеет четную длину.
- 16.1. Доказать, что отношение  $\preceq$  определяет частичный порядок на любом семействе конечных графов
- 16.2. Верно ли предыдущее утверждение для бесконечных графов?
17. Доказать, что элементами пространства циклов графа  $G$  являются объединения семейств ребер непересекающихся по ребрам циклов  $G$ , и только они.
18. Доказать, что циклы и разрезы графа вместе порождают все пространство ребер, или найти контрпример.
19. Каковы размерности пространств графа с  $k$  компонентами
  - 19.1. циклов;
  - 19.2. разрезов.
20. Доказать, что в неориентированном графе число вершин с нечетной степенью четно.
21. Доказать, что неориентированный связный граф остается связным после удаления некоторого ребра тогда и только тогда, когда это ребро принадлежит некоторому циклу графа.
22. Доказать, что связный неориентированный граф с  $n$  вершинами
  - 22.1. Содержит не менее  $n-1$  ребер;
  - 22.2. если содержит больше, чем  $n-1$  ребер, то содержит и минимум один цикл.
23. Доказать, что каждый граф можно вложить в  $\mathbb{R}^3$  так, что все ребра --- прямые линии.
24. Вывести формулу Эйлера для несвязных графов.
25. Пусть связный граф  $G$  содержит  $n$  вершин,  $m$  ребер и цикл минимальной возможной длины  $g$ . Доказать, что  $m \leq n - (n-2)/(g-2)$ .
26. Доказать, что каждый планарный граф --- объединение трех лесов.
27. Доказать, что каждый планарный граф изоморфен планарному графу с ребрами --- прямыми линиями.
28. Существует ли для каждого планарного графа такая реализация на плоскости, что все внутренние грани --- выпуклые многогранники.
29. Доказать, что двусвязный планарный граф двусоставен тогда и только тогда, когда каждая грань ограничена четным циклом.

30. Как выглядит граф, плоско-двойственный планарному дереву.
31. Доказать, что плоско-двойственный планарному мультиграфу граф связан.
32. Доказать, что связный граф  $G=(V, E)$  планарен тогда и только тогда, когда существует такой связный мультиграф  $G'=(V', E')$ , что для каждого подмножества  $F \subseteq E$  граф  $(V, F)$  дерево тогда и только тогда, когда  $(V', E' \setminus F)$  дерево.
33. Доказать, что два плоско-двойственных планарному мультиграфу комбинаторно изоморфны.
34. Пусть  $G, G^*$  --- взаимно двойственные планарные графы. Пусть  $B_1, \dots, B_n$  --- блоки  $G$ . Доказать, что  $B_1^*, \dots, B_n^*$  --- блоки  $G^*$ .
35. Доказать, что если  $G^*$  абстрактно двойственен мультиграфу  $G$ , то и  $G$  абстрактно двойственен  $G^*$ .
36. Доказать, что теорема о четырех красках действительно решает задачу о раскраске карт. Верно ли обратное --- влечет ли возможность раскраски каждой карты в четыре цвета теорему о четырех красках?
37. Доказать, что для решения задачи о раскраске карт достаточно рассматривать такие карты, что ни одна точка не лежит на общей границе более чем трех стран. Как это влияет на доказательство теоремы о четырех красках.
38. Попытайтесь доказать теорему о четырех красках по аналогии с теоремой о пяти красках. Где доказательство не проходит?
39. Выразить хроматическое число графа через хроматические числа блоков графа.
40. Доказать, что в полном неориентированном графе  $K_n$  каждое ребро принадлежит ровно  $n-2$  треугольникам.
41. Доказать, что для каждого графа  $G$  существует такой порядок на множестве вершин, что "жадный алгоритм" использует только  $\chi(G)$  красок.
42. Для любого  $n > 1$  найти двусоставный граф с  $2n$  вершинами, упорядочеными так, что "жадный алгоритм" использует  $2n$  красок вместо двух.
43.  $k$ -хроматический граф называется критически  $k$ -хроматическим, если для каждой вершины  $v \in V(G)$   $\chi(G-v) < k$ . Доказать, что каждый критически  $k$ -хроматический граф имеет критически  $k$ -хроматический индуцированный подграф, минимальная степень которого не ниже  $k-1$ .
44. Описать критические  $3$ -хроматические графы.
45. Доказать, что каждый критический  $k$ -хроматический граф  $k-1$ -реберно связан.
46. Описать класс графов  $G$ , для которых  $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ .
47. Для любого  $k \in \mathbb{N}$  построить  $k$ -хроматический граф без треугольников.

### 7.1. Основная литература:

1. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. Изд.: "Лань" ISBN: 978-5-8114-0570-1, 2009, - 6-е изд., стер. 400 с. <http://e.lanbook.com/view/book/220/>
2. Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 224 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет) ISBN 978-5-8199-0304-9, 700 экз. <http://znanium.com/bookread.php?book=376152>
3. Лекции по дискретной математике: Учебное пособие / В.Б. Алексеев. - М.: НИЦ Инфра-М, 2012. - 90 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (обложка) ISBN 978-5-16-005559-6, 1000 экз. <http://znanium.com/bookread.php?book=278874>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Асанов М.О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / Асанов М.О. Баранский В.А., Расин В.В. Изд.: "Лань", ISBN: 978-5-8114-1068-2, 2-е изд. испр. и доп., 2010, - 368 с. <http://e.lanbook.com/view/book/536/>
2. Мальцев И.А. Дискретная математика. Изд.: "Лань", ISBN: 978-5-8114-1010-1, 1-е изд. 2011, - 304 с. <http://e.lanbook.com/view/book/638/>
3. Н. А. Корешков, М. Ф. Насрутдинов, Сборник задач по теории чисел : учеб. пособие / Казан. гос. ун-т ; [сост.: Н. А. Корешков, М. Ф. Насрутдинов] .? Казань : [Казан. гос. ун-т], 2006 .? 15, [1] с. ; 21. <http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-760474.pdf>

### 7.3. Интернет-ресурсы:

Лабораторные работы на тему "Основы Теории Графов" для учеников средней школы и студентов Вузов Т.С. Золотарева - <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/zolotareva/main.asp>  
Основы теории графов: Учебник - <http://window.edu.ru/resource/884/70884>  
Сборник задач по дискретной математике - <http://window.edu.ru/resource/609/73609>  
Учебное пособие Кафедры математической теории интеллектуальных систем МГУ им. М.В. Ломоносова - <http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm>  
Электронный учебник по дисциплине: "Дискретная математика" - [http://de.ifmo.ru/bk\\_netra/start.php?bn=23](http://de.ifmo.ru/bk_netra/start.php?bn=23)

### 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Дискретная математика" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Ноутбук, проектор

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 011800.62 "Радиофизика" и профилю подготовки Радиофизические методы по областям применения (Радиофизические измерения) .

Автор(ы):

Иваньшин П.Н. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Попов А.А. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.