

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт физики



подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Теория представлений групп и алгебр Ли с приложениями М2.ДВ.4

Направление подготовки: 011200.68 - Физика

Профиль подготовки: Физика конденсированного состояния

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Патрин Е.В.

**Рецензент(ы):**

Даишев Р.А.

### **СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Сушков С. В.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института физики:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 6131414

Казань

2014

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) ассистент, б/с Патрин Е.В. Кафедра теории относительности и гравитации Отделение физики, Evgeny.Patrin@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины Теория представлений групп и алгебр Ли с приложениями являются получение знаний по основам теории представлений алгебр и групп Ли и их приложениям к классическим и квантовым системам.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " М2.ДВ.4 Профессиональный" основной образовательной программы 011200.68 Физика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 1 курсе, 2 семестр.

Дисциплина(М.2.ДВ.4) входит в вариативную часть профессионального цикла (М.2) как дисциплина по выбору. Для освоения дисциплины необходимы знания дисциплин: теории групп и алгебр Ли элементов римановой и симплектической геометрий и основ функционального анализа с одной стороны и теоретической механики, квантовой механики и статистической физики и термодинамики с другой.

Освоение дисциплины необходимо для изучения дисциплин, связанных с квантовой теорией поля на искривлённых пространствах-времени (а также с квантовой гравитацией), и для успешной профессиональной деятельности.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ок-1	способность демонстрировать углубленные знания в области математики и естественных наук
пк-1	способность свободно владеть фундаментальными разделами физики, необходимыми для решения научно-исследовательских задач (в соответствии со своей магистерской программой);
пк-2	способность использовать знания современных проблем физики, новейших достижений физики в своей научно-исследовательской деятельности;
пк-3	научно-исследовательская деятельность: способность самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики (в соответствии с профилем магистерской программы) и решать их с помощью современной аппаратуры, оборудования, информационных технологий, использования новейшего отечественного и зарубежного опыта;
пк-5	способность использовать свободное владение профессионально- профилированными знаниями в области информационных технологий, современных компьютерных сетей, программных продуктов и ресурсов Интернет для решения задач профессиональной деятельности, в том числе находящихся за пределами профильной подготовки;

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
пк-6	научно-инновационная деятельность: способность свободно владеть разделами физики, необходимыми для решения научно-инновационных задач (в соответствии с профилем подготовки);
пк-7	способность свободно владеть профессиональными знаниями для анализа и синтеза физической информации (в соответствии с профилем подготовки);

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:
2. должен уметь:
3. должен владеть:
4. должен продемонстрировать способность и готовность:

использовать теоретические основы теории представлений групп и алгебр Ли при решении конкретных физических и математических задач, применять навыки построения квантовых систем по классическим системам с искривлённым фазовым пространством с использованием теории представлений и их исследованию; строить присоединённые, коприсоединённые и индуцированные представления различных конкретных групп и алгебр Ли, строить орбиты коприсоединённых представлений конкретных групп Ли и уметь строить по орбитам унитарные представления; .

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных(ые) единиц(ы) 72 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет во 2 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Топологические пространства и непрерывные отображения.	2	1-2	1	2	0	домашнее задание
2.	Тема 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.	2	2-5	3	6	0	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
3.	Тема 3. Группы и алгебры Ли. Группы Ли и некоторые конструкции с ними.	2	6-8	2	4	0	домашнее задание
4.	Тема 4. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), и некоторые конструкции с ними	2	9-13	3	6	0	домашнее задание
5.	Тема 5. Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли.	2	13-18	3	6	0	домашнее задание
	Тема . Итоговая форма контроля	2		0	0	0	зачет
	Итого			12	24	0	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Топологические пространства и непрерывные отображения.

#### *лекционное занятие (1 часа(ов)):*

Лекция Предварительные сведения. Топологические пространства и непрерывные отображения. Топология, окрестности, фактор-топология, индуцированная топология, базы и предбазы топологии, примеры. Гомеоморфизмы, прямое произведение топологических пространств.

#### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Задчи на построение топологий на конечных множествах и описание непрерывных отображений на полученных топологических пространствах.

### Тема 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.

#### *лекционное занятие (3 часа(ов)):*

Лекция 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения. Карты и атласы. Прямое произведение гладких многообразий. Подмногообразия, алгебры гладких функций на многообразиях, гладкие отображения, диффеоморфизмы. Лекция 3. . Касательный вектор, касательные и кокасательные пространства, касательные и кокасательные расслоения. Векторные и ковекторные поля. Прямые суммы и тензорные произведения расслоений. Тензорные расслоения. Лекция 4. Дифференциальные формы, внешний дифференциал, поведение векторных полей и дифференциальных форм при отображениях. Производная Ли.

#### *практическое занятие (6 часа(ов)):*

Построение атласов на сфере, торе, проективном пространстве

### Тема 3. Группы и алгебры Ли. Группы Ли и некоторые конструкции с ними.

#### *лекционное занятие (2 часа(ов)):*

Лекция 5. Группы и алгебры Ли. Группы Ли и подгруппы Ли в группе Ли, полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные группы Ли, прямое и полупрямое произведения групп. Лекция 6. Алгебры Ли, алгебра Ли векторных полей на многообразии, связь между группами Ли и алгебрами Ли, экспонента и логарифм, подалгебры и идеалы алгебр Ли, полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные алгебры Ли, коалгебры, коумножение в коалгебре.

#### *практическое занятие (4 часа(ов)):*

Построение группового умножения и отображений коумножения и обращения в карте для некоторых групп.

#### **Тема 4. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), и некоторые конструкции с ними**

##### **лекционное занятие (3 часа(ов)):**

Лекция 7. Теория представлений. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), сплетающие операторы, эквивалентные представления, подпредставления, фактор - представления групп Ли. Лекция 8. Приводимые и вполне приводимые представления групп Ли, присоединённое и коприсоединённое представления групп Ли представления алгебр Ли. Лекция 9. Связь между представлениями группы Ли и её алгеброй Ли, присоединённое и коприсоединённое представления алгебры Ли, прямые суммы и тензорные произведения представлений. Индуцированные представления.

##### **практическое занятие (6 часа(ов)):**

Построение примеров представлений и сплетающих операторов.

#### **Тема 5. Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли.**

##### **лекционное занятие (3 часа(ов)):**

Лекции 10. Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли. Лекция 11. Орбиты коприсоединённого представления группы Ли как фазовые пространства систем классической механики. Лекция 12. Построение по орбите унитарного представления (метод орбит), обобщение на неоднородную ситуацию (геометрическое квантование).

##### **практическое занятие (6 часа(ов)):**

Построение примеров орбит. Квантование плоского фазового пространства.

### **4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Топологические пространства и непрерывные отображения.	2	1-2	подготовка домашнего задания	3	домашнее задание
2.	Тема 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.	2	2-5	подготовка домашнего задания	9	домашнее задание
3.	Тема 3. Группы и алгебры Ли. Группы Ли и некоторые конструкции с ними.	2	6-8	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
4.	Тема 4. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), и некоторые конструкции с ними	2	9-13	подготовка домашнего задания	9	домашнее задание
5.	Тема 5. Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли.	2	13-18	подготовка домашнего задания	9	домашнее задание
	Итого				36	

## **5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения**

интернет-технологии, использование систем аналитических вычислений.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Топологические пространства и непрерывные отображения.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Предварительные сведения. Топологические пространства и непрерывные отображения. Топология, окрестности, фактор-топология, индуцированная топология, базы и предбазы топологии, примеры. Гомеоморфизмы, прямое произведение топологических пространств.

### **Тема 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Гладкие многообразия и гладкие отображения. Карты и атласы. Прямое произведение гладких многообразий. Подмногообразия, алгебры гладких функций на многообразиях, гладкие отображения, диффеоморфизмы. Касательный вектор, касательные и кокасательные пространства, касательные и кокасательные расслоения. Векторные и ковекторные поля. Прямые суммы и тензорные произведения расслоений. Тензорные расслоения. Дифференциальные формы, внешний дифференциал, поведение векторных полей и дифференциальных форм при отображениях. Производная Ли.

### **Тема 3. Группы и алгебры Ли. Группы Ли и некоторые конструкции с ними.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Группы и алгебры Ли. Группы Ли и подгруппы Ли в группе Ли, полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные группы Ли, прямое и полупрямое произведения групп. Алгебры Ли, алгебра Ли векторных полей на многообразии, связь между группами Ли и алгебрами Ли, экспонента и логарифм, подалгебры и идеалы алгебр Ли, полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные алгебры Ли, коалгебры, коумножение в коалгебре.

### **Тема 4. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), и некоторые конструкции с ними**

домашнее задание , примерные вопросы:

Теория представлений. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), сплетающие операторы, эквивалентные представления, подпредставления, фактор - представления групп Ли. Приводимые и вполне приводимые представления групп Ли, присоединённое и коприсоединённое представления групп Ли представления алгебр Ли. Связь между представлениями группы Ли и её алгеброй Ли, присоединённое и коприсоединённое представления алгебры Ли, прямые суммы и тензорные произведения представлений. Индуцированные представления.

### **Тема 5. Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Некоторые приложения теории представлений групп и алгебр Ли. Орбиты коприсоединённого представления группы Ли как фазовые пространства систем классической механики. Построение по орбите унитарного представления (метод орбит), обобщение на неоднородную ситуацию (геометрическое квантование).

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету:

#### **ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ/ЗАЧЕТУ**

1. Топология, окрестности, фактор-топология, индуцированная топология, базы и предбазы топологии.
2. Гомеоморфизмы, прямое произведение топологических пространств.

3. Карты и атласы. Прямое произведение гладких многообразий.
4. Подмногообразия, алгебры гладких функций на многообразиях, гладкие отображения, диффеоморфизмы.
5. Касательный вектор, касательные и кокасательные пространства, касательные и кокасательные расслоения. Векторные и ковекторные поля.
6. Прямые суммы и тензорные произведения расслоений. Тензорные расслоения.
7. Дифференциальные формы, внешний дифференциал, поведение векторных полей и дифференциальных форм при отображениях. Производная Ли.
8. Группы Ли и подгруппы Ли в группе Ли.
9. Полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные группы Ли.
10. Прямое и полупрямое произведения групп.
11. Алгебры Ли, подалгебры и идеалы алгебр Ли, алгебра Ли векторных полей на многообразии.
12. Связь между группами Ли и алгебрами Ли.
13. Полупростые, простые, разрешимые и нильпотентные алгебры Ли.
14. Представления групп Ли (линейные, унитарные, проективные), сплетающие операторы, эквивалентные представления.
15. Подпредставления, фактор - представления групп Ли, приводимые и вполне приводимые представления групп Ли.
16. Связь между представлениями групп Ли и их алгебр Ли.
17. Прямые суммы и тензорные произведения представлений.
18. Присоединенное и коприсоединенное представления групп и алгебр Ли.
19. Орбиты коприсоединенного представления группы Ли.
20. Построение по орбите унитарного представления.

### 7.1. Основная литература:

- Хамермеш, М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам : перевод с английского / М. Хамермеш ; Пер. Ю. А. Данилова. - Издание 3-е. - Москва: Либроком, 2010. - 584 с.
- Наймарк М.А. Теория представлений групп. - М. Физматлит, 2010. - 576 с.  
<http://e.lanbook.com/view/book/2751/>
- Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - М.: Лань, 2009. - 288 с.  
<http://e.lanbook.com/view/book/177/>

### 7.2. Дополнительная литература:

- Ляпин Е. С., Аизенштат А. Я., Лесохин М. М. Упражнения по теории групп: Учебное пособие. 2-е изд., стер. СПб.: Издательство "Лань", 2010. - 272 с. <http://e.lanbook.com/view/book/528/>
- Молев А.И. Янгианы и классические алгебры Ли. - М.: Изд-во МЦНМО, 2009. - 534с.

### 7.3. Интернет-ресурсы:

- Сайт кафедры теории относительности и гравитации КФУ - <http://old.kpfu.ru/f6/k6/index.php?id=1>
- Теория представлений групп. Наймарк М.А. - <http://e.lanbook.com/view/book/2751/>
- Электронная библиотека - <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>
- Электронная библиотека - <http://znanium.com/>
- Электронная библиотека механико-математического факультета Московского государственного университета - <http://lib.mexmat.ru/allbooks.php>



## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Теория представлений групп и алгебр Ли с приложениями" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

учебные аудитории Института физики

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 011200.68 "Физика" и магистерской программе Физика конденсированного состояния .

Автор(ы):

Патрин Е.В. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Даишев Р.А. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.