

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины

Нелинейный функциональный анализ М1.ДВ.1

Направление подготовки: 231300.68 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Задворнов О.А.

Рецензент(ы):

Павлова М.Ф.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Регистрационный No 978914

Казань
2014

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Задворнов О.А. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики , Oleg.Zadvornov@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

После изучения курса дисциплины студент должен овладеть знаниями о нелинейных функционалах в гильбертовом пространстве, проксимальном отображении, субградиентах и субдифференциалах, уметь решать задачи на минимум функционала.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " М1.ДВ.1 Общенаучный" основной образовательной программы 231300.68 Прикладная математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 3 семестр.

Данная дисциплина относится к курсу дисциплин по выбору.

Читается на 2 курсе в 1 семестре для магистров обучающихся по направлению "Прикладная математика".

Изучение основывается на результатах изучения дисциплин "Уравнения математической физики", "Численные методы", "Функциональный анализ".

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-4 (профессиональные компетенции)	способностью к профессиональной эксплуатации современного оборудования и приборов(в соответствии с целями ООП магистратуры)
ПК-5 (профессиональные компетенции)	способностью организовывать работу исполнителей, находить и принимать управленческие решения в области организации труда
ПК-6 (профессиональные компетенции)	готовностью к принятию ответственности за свои решения в рамках профессиональной компетенции, способен принимать нестандартные решения, разрешать проблемные ситуации
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способностью разрабатывать и исследовать математические модели объектов, систем, процессов и технологий, предназначенных для проведения расчетов, анализа, подготовки решений

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

Студенты, завершившие изучение данной дисциплины должны быть знакомыми с теми разделами функционального анализа, которые традиционно используются при исследовании свойств нелинейных функционалов, при построении численных методов решения задач математической физики, и знакомство с которыми необходимо для математика-прикладника.

2. должен уметь:

использовать полученные знания для решения прикладных задач, в частности, для решения задач математической физики и создания методов решения этих задач

3. должен владеть:

такими дисциплинами как "Уравнения математической физики", "Численные методы", "Функциональный анализ".

4. должен демонстрировать способность и готовность:

при решении и исследовании конкретных прикладных задач использовать знание основных результатов и методов нелинейного функционального анализа.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет зачетных(ые) единиц(ы) 180 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 3 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Гильбертовы пространства. Проекция на выпуклое замкнутое множество.	3	1	0	4	0	домашнее задание
2.	Тема 2. Проекция на подпространство. Линейные непрерывные функционалы.	3	2	0	4	0	домашнее задание
3.	Тема 3. Выпуклые функционалы и их свойства.	3	3-4	0	6	0	домашнее задание
4.	Тема 4. Слабая сходимость.	3	4-5	0	6	0	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
5.	Тема 5. Различные виды непрерывности и монотонности.	3	6-7	0	8	0	контрольная работа
6.	Тема 6. Слабо полунепрерывные снизу функционалы.	3	8-9	0	6	0	домашнее задание
7.	Тема 7. Проксимальное отображение в гильбертовом пространстве.	3	9-10	0	6	0	домашнее задание
8.	Тема 8. Теоремы существования для вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами.	3	11-12	0	6	0	домашнее задание
9.	Тема 9. Вариация и производная Гато функционала.	3	12-14	0	8	0	контрольная работа
10.	Тема 10. Задачи на минимум функционала. Теоремы существования и эквивалентность вариационным неравенствам.	3	14-15	0	4	0	домашнее задание
11.	Тема 11. Отделимость выпуклых множеств.	3	15-16	0	6	0	домашнее задание
12.	Тема 12. Субградиенты и субдифференциалы.	3	17	0	4	0	домашнее задание
13.	Тема 13. Субдифференциальное исчисление.	3	18	0	4	0	домашнее задание
	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	экзамен
	Итого			0	72	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Гильбертовы пространства. Проекция на выпуклое замкнутое множество.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Определение Гильбертова пространства. Лемма о существовании ортогонального базиса в конечномерном гильбертовом пространстве. Теоремы о проекции на выпуклое замкнутое множество.

Тема 2. Проекция на подпространство. Линейные непрерывные функционалы.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Рассматриваются проекции на замкнутое выпуклое множество и на подпространства, устанавливаются свойства этих проекций. Доказываются теорема об ортогональном разложении, теорема Рисса-Фишера о представлении линейных непрерывных функционалов и теорема Хана-Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов.

Тема 3. Выпуклые функционалы и их свойства.

практическое занятие (6 часа(ов)):

Определение эффективной области функционала, его надграфика. Определение выпуклого функционала. Леммы о свойствах выпуклого функционала.

Тема 4. Слабая сходимость.

практическое занятие (6 часа(ов)):

Определение слабой сходимости. Леммы о свойствах слабой сходимости. Теорема о вложенных шарах. Принцип равномерной ограниченности Банаха - Штейнгауза для линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве.

Тема 5. Различные виды непрерывности и монотонности.

практическое занятие (8 часа(ов)):

Определения различных видов непрерывности и монотонности. Связь между этими различными видами.

Тема 6. Слабо полунепрерывные снизу функционалы.

практическое занятие (6 часа(ов)):

приводятся основные свойства слабо полунепрерывных снизу функционалов

Тема 7. Проксимальное отображение в гильбертовом пространстве.

практическое занятие (6 часа(ов)):

вводятся так называемые проксимальные отображения и изучаются их свойства

Тема 8. Теоремы существования для вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами.

практическое занятие (6 часа(ов)):

устанавливаются результаты о разрешимости вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами. Доказываются теоремы существования.

Тема 9. Вариация и производная Гато функционала.

практическое занятие (8 часа(ов)):

Определение производной Гато для функционала. Свойства производной Гато для функционала.

Тема 10. Задачи на минимум функционала. Теоремы существования и эквивалентность вариационным неравенствам.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Задачи на минимум функционала. Первая обобщенная теорема Вейерштрасса. Вторая обобщенная теорема Вейерштрасса. Теорема об эквивалентности вариационным неравенствам.

Тема 11. Отделимость выпуклых множеств.

практическое занятие (6 часа(ов)):

Определение отделимости выпуклых множеств. Теорема об отделимости выпуклых множеств.

Тема 12. Субградиенты и субдифференциалы.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Определение субградиента и субдифференциала. Свойства субградиента и субдифференциала.

Тема 13. Субдифференциальное исчисление.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Распространение правил дифференцирования на исчисление субдифференциалов. Теорема Моро - Рокафеллара.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Гильбертовы пространства. Проекция на выпуклое замкнутое множество.	3	1	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
2.	Тема 2. Проекция на подпространство. Линейные непрерывные функционалы.	3	2	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
3.	Тема 3. Выпуклые функционалы и их свойства.	3	3-4	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
4.	Тема 4. Слабая сходимость.	3	4-5	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
5.	Тема 5. Различные виды непрерывности и монотонности.	3	6-7	подготовка к контрольной работе	8	контрольная работа
6.	Тема 6. Слабо полунепрерывные снизу функционалы.	3	8-9	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
7.	Тема 7. Проксимальное отображение в гильбертовом пространстве.	3	9-10	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
8.	Тема 8. Теоремы существования для вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами.	3	11-12	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
9.	Тема 9. Вариация и производная Гато функционала.	3	12-14	подготовка к контрольной работе	8	контрольная работа
10.	Тема 10. Задачи на минимум функционала. Теоремы существования и эквивалентность вариационным неравенствам.	3	14-15	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
11.	Тема 11. Отделимость выпуклых множеств.	3	15-16	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
12.	Тема 12. Субградиенты и субдифференциалы.	3	17	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
13.	Тема 13. Субдифференциальное исчисление.	3	18	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
	Итого				72	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме практических занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Изучение курса подразумевает получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Гильбертовы пространства. Проекция на выпуклое замкнутое множество.

домашнее задание , примерные вопросы:

Неравенство Коши-Буняковского. Доказать существовании ортонормированного базиса в конечномерном гильбертовом пространстве.

Тема 2. Проекция на подпространство. Линейные непрерывные функционалы.

домашнее задание , примерные вопросы:

Пример множества линейных непрерывных функций. Доказать теорему Хана-Банаха.

Тема 3. Выпуклые функционалы и их свойства.

домашнее задание , примерные вопросы:

Пример выпуклого функционала. Привести свойства выпуклого функционала.

Тема 4. Слабая сходимость.

домашнее задание , примерные вопросы:

Доказать, что предел слабо сходящейся последовательности определяется единственным образом.

Тема 5. Различные виды непрерывности и монотонности.

контрольная работа , примерные вопросы:

Вопросы для контрольной работы. Определение радиально непрерывного в точке оператора. Определение хеминепрерывного в точке оператора. Определение деминепрерывного в точке оператора. Определение непрерывного в точке оператора. Определение липшиц - непрерывного в точке оператора. Определение монотонного оператора. Определение строго монотонного оператора. Определение сильно монотонного оператора. Определение обратно сильно монотонного оператора. Определение псевдомонотонного оператора. Лемма. Псевдомонотонный оператор является деминепрерывным. Лемма. Ограниченный, монотонный, радиально непрерывный оператор является псевдомонотонным. Определение сжимающего оператора. Определение коэрцитивного оператора. Определение асимптотически регулярного оператора. Лемма об обратно сильно монотонном операторе. Лемма об коэрцитивном операторе. Определение липшиц-непрерывного функционала. Определение коэрцитивного функционала.

Тема 6. Слабо полунепрерывные снизу функционалы.

домашнее задание , примерные вопросы:

Пример слабо полунепрерывного снизу функционала. Доказать, что выпуклый полунепрерывный снизу функционал является слабо полунепрерывным снизу.

Тема 7. Проксимальное отображение в гильбертовом пространстве.

домашнее задание , примерные вопросы:

Доказать эквивалентность задачи минимизации с собственным, выпуклым и полунепрерывным снизу функционалом вариационной задаче.

Тема 8. Теоремы существования для вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами.

домашнее задание , примерные вопросы:

Записать ключевые моменты доказательств Следствия теоремы Брауэра. Теоремы существования для вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами.

Тема 9. Вариация и производная Гато функционала.

контрольная работа , примерные вопросы:

Вопросы для контрольной работы. Определение вариации Гато функционала. Определение производной Гато функционала. Пример дифференцируемой по Гато функции. Лемма об обобщенной формуле Лагранжа. Леммы о свойствах дифференцируемой по Гато функционала. Определение потенциального оператора. Теорема о радиально непрерывном операторе.

Тема 10. Задачи на минимум функционала. Теоремы существования и эквивалентность вариационным неравенствам.

домашнее задание , примерные вопросы:

Доказать единственность решения задачи на минимум функционала.

Тема 11. Отделимость выпуклых множеств.

домашнее задание , примерные вопросы:

Пусть K выпуклый замкнутый конус, не совпадающий со всем пространством V . Тогда существует ненулевой линейный непрерывный функционал F , принимающий неотрицательные значения на множестве K .

Тема 12. Субградиенты и субдифференциалы.

домашнее задание , примерные вопросы:

Определить субградиент функционала $F=||u||$.

Тема 13. Субдифференциальное исчисление.

домашнее задание , примерные вопросы:

Пусть $F : V \rightarrow R, \lambda > 0$. Доказать, что $\partial (\lambda F)(u) = \lambda \partial F(u)$ для всех u из V .

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к экзамену:

Полный перечень экзаменационных билетов приложен к программе дисциплины в качестве приложения1.

Примеры экзаменационных билетов

Билет 1.

1. Определение гильбертова пространства. Лемма о существовании ортонормированного базиса в конечномерном гильбертовом пространстве.
2. Виды непрерывности оператора. Лемма. Ограниченный, монотонный, радиально непрерывный оператор является псевдомонотонным.

Билет 2.

1. Определение сопряженного оператора. Теорема Хана-Банаха.
2. Пример слабо полунепрерывного снизу функционала. Теорема о слабо полунепрерывном снизу функционале.

Билет 3.

1. Свойства слабой сходимости. Слабая сходимости в конечномерном гильбертовом пространстве.
2. Теорема Брауэра. Следствие теоремы Брауэра.

Билет 4.

1. Теоремы о проекции на выпуклое замкнутое множество.
2. Определение коэрцитивного оператора. Лемма об коэрцитивном операторе.

Билет 5.

1. Теорема. Выпуклый полунепрерывный снизу функционал является слабо полунепрерывным снизу.
2. Леммы о свойствах дифференцируемом по Гато функционале.

7.1. Основная литература:

1. Сидоров, Анатолий Михайлович. Функциональный анализ: [учебное пособие] / А. М. Сидоров. - Казань: Казанский университет, 2010. - 139 с.; 21. - Библиогр.: с. 4 (4 назв.). - ISBN 978-5-98180-834-0((в пер.)), 130.
2. Наймарк, Марк Аронович. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. - Изд. 3-е. - Москва: Физматлит, 2010. - 526 с.: ил.; 22. - (Классика и современность). - Указ. - Библиогр.: с. 499-519. - ISBN 978-5-9221-1259-8((в пер.)), 400.
3. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учебное пособие / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с.: 70x100 1/16. - (Высшее образование: Магистратура). (обложка) ISBN 978-5-16-006429-1, 1000 экз.
<http://www.znaniyum.com/catalog.php?bookinfo=377270>
4. Краткий курс функционального анализа: Учебное пособие. / Люстерник Л.А., Соболев В.И. 2-е изд., стер. - СПб: Издательство "Лань", 2009. - 272 с. ISBN 978-5-8114-0976-1
<http://e.lanbook.com/view/book/245/>
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - 7-е изд. - М.: Физматлит, 2009. - 572 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206

7.2. Дополнительная литература:

1. Корпусов М. О, Свешников А. Г. Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике: методы исследования нелинейных операторов. - Москва URSS [КРАСАНД] -2011., - 474 с. ISBN: 978-5-396-00363-7
2. Свешников А. Г. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов. - Москва: Науч. мир, 2008. - 399 с.: ил.; 22 см. - Библиогр.: с. 397-399. - ISBN 978-5-91522-011-8(В пер.), 500.

3. Луговая Г. Д. Функциональный анализ: Специальные курсы: учебное пособие / Г. Д. Луговая, А. Н. Шерстнев. - Москва: URSS: Издательство ЛКИ, 2008. - 256 с.; 22 см. - На 4-й с. обл. авт.: Г.Д. Луговая, доц., к.ф.-м.н., А.Н. Шерстнев, проф., д.ф.-м.н. - Библиогр.: с. 245-247 (30 назв.). - Указ. обозначений, указ. терминов: с. 248-251. - ISBN 978-5-382-00444-0.

7.3. Интернет-ресурсы:

Учебник - http://z3950.ksu.ru/bcover/0000688922_con.pdf

Учебное пособие - <http://e.lanbook.com/view/book/245/>

Учебное пособие - http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_039_000398.pdf

Учебное пособие - <http://www.znaniium.com/catalog.php?bookinfo=377270>

Учебное пособие - http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Нелинейный функциональный анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 231300.68 "Прикладная математика" и магистерской программе Математическое моделирование .

Автор(ы):

Задворнов О.А. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Павлова М.Ф. _____

"__" _____ 201__ г.