

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

**Программа дисциплины**  
**Математическая логика Б2.ДВ.3**

Направление подготовки: 010400.62 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: Численные методы

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Замов Н.К.

**Рецензент(ы):**

-

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Латыпов Р. Х.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_ от "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_ от "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 9143914

Казань  
2014

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) главный специалист Замов Н.К. Аналитический отдел  
Центр перспективного развития , Nail.Zamov@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

В курсе даются основные понятия и результаты математической логики. Изучается формальная система классической логики 1 порядка и исследуются вопросы полноты и непротиворечивости. Приводятся основные результаты математической логики - теорема Гёделя, теорема Эрбрана, теорема Лёвенгейма - Скулема. Дается понятие о неклассических логиках, о логических системах с равенством.

Приводятся примеры приложений формальной логики в информатике, в частности, для построения систем искусственного интеллекта.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б2.ДВ.3 Общепрофессиональный" основной образовательной программы 010400.62 Прикладная математика и информатика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 4 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 2 курсе во 2 семестре для студентов обучающихся по направлению "Фундаментальная информатика и информационные технологии".

Изучение основывается на результатах изучения дисциплины "Дискретная математика".

Результаты подготовки по дисциплине "Математическая логика и теория алгоритмов" используются при изучении курсов "Языки программирования", "Логическое программирование".

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-4 (профессиональные компетенции)	способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат, фундаментальные концепции и системные методологии, международные и профессиональные стандарты в области информационных технологий, способность использовать современные инструментальные и вычислительные средства (в соответствии с профилизацией)
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способность применять на практике международные и профессиональные стандарты информационных технологий, современные парадигмы и методологии, инструментальные и вычислительные средства (в соответствии с профилем подготовки)
ПК-9 (профессиональные компетенции)	способность осуществлять на практике современные методологии управления жизненным циклом и качеством систем, программных средства и сервисов информационных технологий

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

- роль математической логики в основаниях математики

2. должен уметь:

- ориентироваться в основных результатах математической логики

3. должен владеть:

- теоретическими знаниями о формальных системах 1 порядка

4. должен демонстрировать способность и готовность:

- строить формальные доказательства и выводы в исчислении предикатов

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных(ые) единиц(ы) 72 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Исчисление высказываний Высказывания. Логические операции. Формулы. Таблицы истинности. Общезначимые формулы. Логическое следование. Нормальные формы. Аксиоматическая система исчисления высказываний. Доказуемость и выводимость. Теорема о дедукции. Правила введения и удаления логических связок. Непротиворечивость и полнота исчисления						

высказываний. Анализ рассуждений на естественном языке.

4	0	0	10	домашнее задание
---	---	---	----	------------------

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
2.	Тема 2. Исчисление предикатов Кванторы. Свободные и связанные переменные. Формулы. Интерпретации. Общезначимость. Логическое следование. Теория доказательств. Аксиомы и правила вывода. Теорема о дедукции. Введение и удаление кванторов. Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость. Теорема Эрбрана.	4		0	0	8	домашнее задание
3.	Тема 3. Исчисление с равенством. Функции, термы. Аксиомы равенства. Формальные доказательства в	4		0	0	8	домашнее задание
<b>4.2 Содержание дисциплины</b> <b>Тема 1. Исчисление высказываний. Высказывания. Логические операции. Формулы. Таблицы истинности. Общезначимые формулы. Логическое следование. Нормальные формулы. Аксиоматическая система исчисления высказываний. Доказуемость и выводимость. Теорема о дедукции. Правила введения и удаления логических связок. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний. Анализ рассуждений на естественном языке.</b> <b>лабораторная работа (10 часа(ов)):</b> Определение логических операций. Формулы логики высказываний. Составление таблиц истинности. Примеры общезначимых формул. Отношение логического следования и его свойства. Построение ДНФ и КНФ. Система аксиом исчисления высказываний, правило modus ponens. Формальные доказательства (пример- доказательство закона исключённого третьего). Узкое исчисление допущений. Доказательство теоремы о дедукции. Обоснование корректности правил введения и удаления пропозициональных связок. Доказательство непротиворечивости исчисления высказываний. Лемма о соответствующих N-ках букв. <b>Тема 4. Проблемы неразрешимости в разрядном языке.</b> <b>лабораторная работа (10 часа(ов)):</b> Исчисление логических операций. Формулы логики высказываний. Составление таблиц истинности. Примеры общезначимых формул. Отношение логического следования и его свойства. Построение ДНФ и КНФ. Система аксиом исчисления высказываний, правило modus ponens. Формальные доказательства (пример- доказательство закона исключённого третьего). Узкое исчисление допущений. Доказательство теоремы о дедукции. Обоснование корректности правил введения и удаления пропозициональных связок. Доказательство непротиворечивости исчисления высказываний. Лемма о соответствующих N-ках букв. <b>Тема 5. Итоговое</b> Доказательство теоремы о полноте исчисления, Формализация предложений и рассуждений естественного языка							
	Тема 2. Исчисление предикатов Кванторы. Свободные и связанные переменные. Формулы. Интерпретации. Общезначимость. Логическое следование. Теория доказательств. Аксиомы и правила вывода. Теорема о дедукции. Введение и удаление кванторов. Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость. Теорема Эрбрана.	4		0	0	8	домашнее задание
<b>Итого</b> <b>лабораторная работа (8 часа(ов)):</b>							

Определение кванторов. Формулы логики предикатов. Семантика формул. Примеры общезначимых формул логики предикатов. Основные эквивалентности логики предикатов. Отношение логического следования и его свойства. Система аксиом исчисления высказываний. Правила вывода. Правила введения и удаления кванторов. Приведение формул к предварённой нормальной форме. доказательство непротиворечивости исчисления предикатов. Полнота исчисления относительно семантики.

**Тема 3. Исчисление с равенством. Функции, термы. Аксиомы равенства. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Неклассические логики.**

**лабораторная работа (8 часа(ов)):**

Свойства отношения равенства. Аксиоматическая система равенства. Примеры формальных доказательств в исчислении с равенством. Интуиционистские логики. Семантика Крипке для интуиционистских логик. Примеры поиска опровержений. Модальные логики S4 и S5. Семантика Крипке для модальных логик. Примеры.

**Тема 4. Проблемы разрешимости Разрешимость сингулярного исчисления. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема.**

**лабораторная работа (10 часа(ов)):**

Понятие разрешимости формальных теорий. Разрешимые фрагменты исчисления предикатов первого порядка ( сингулярное исчисление, класс K и др.). Разрешимость теории равенства. Теорема о неразрешимости узкого исчисления предикатов.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Исчисление высказываний Высказывания. Логические операции. Формулы. Таблицы истинности. Общезначимые формулы. Логическое следование. Нормальные формы. Аксиоматическая система исчисления высказываний. Доказуемость и выводимость. Теорема о дедукции. Правила введения и удаления логических связей. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний. Анализ рассуждений на естественном языке.	4		подготовка домашнего задания	9	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
2.	Тема 2. Исчисление предикатов Кванторы. Свободные и связанные переменные. Формулы. Интерпретации. Общезначимость. Логическое следование. Теория доказательств. Аксиомы и правила вывода. Теорема о дедукции. Введение и удаление кванторов. Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость. Теорема Эрбрана.	4		подготовка домашнего задания	9	домашнее задание
3.	Тема 3. Исчисление с равенством. Функции, термы. Аксиомы равенства. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Неклассические логики.	4		подготовка домашнего задания	9	домашнее задание
4.	Тема 4. Проблемы разрешимости Разрешимость сингулярного исчисления. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема.	4		подготовка домашнего задания	9	домашнее задание
	Итого				36	

### 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лекционных и лабораторных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов математической логики на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

**Тема 1. Исчисление высказываний Высказывания. Логические операции. Формулы. Таблицы истинности. Общезначимые формулы. Логическое следование. Нормальные формы. Аксиоматическая система исчисления высказываний. Доказуемость и выводимость. Теорема о дедукции. Правила введения и удаления логических связок. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний. Анализ рассуждений на естественном языке.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

**Тема 2. Исчисление предикатов Кванторы. Свободные и связанные переменные. Формулы. Интерпретации. Общезначимость. Логическое следование. Теория доказательств. Аксиомы и правила вывода. Теорема о дедукции. Введение и удаление кванторов. Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость. Теорема Эрбрана.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

**Тема 3. Исчисление с равенством. Функции, термы. Аксиомы равенства. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Неклассические логики.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

**Тема 4. Проблемы разрешимости Разрешимость сингулярного исчисления. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

**Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету:

По данной дисциплине предусмотрено проведение экзамена. Примерные вопросы для экзамена - Приложение1.

Для текущего контроля успеваемости предусмотрено проведение тестов. Примерные тестовые вопросы - Приложение2.

1. Предмет математической логики. Логические антиномии.
2. Понятие о формальных системах. Примеры формальных систем.
3. Высказывания. Значения истинности. Элементарные и составные высказывания.

4. Основные логические операции и их свойства.
5. Формулы логики высказываний. Таблицы истинности.
6. Эквивалентные формулы, основные эквивалентности.
7. Общезначимые формулы. Основные общезначимости.
8. Теорема о подстановке.
9. Теорема об эквивалентной замене.
10. Принцип двойственности.
11. Исчисление высказываний. Аксиомы, правило *modus ponens*.
12. Формальные доказательства. Примеры.
13. Формальные выводы из допущений. Примеры.
14. Правила введения и удаления логических связок.
15. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний.
16. Логика предикатов. Кванторы. Формулы логики предикатов.
17. Интерпретации формул. Общезначимые, выполнимые формулы.
18. Основные эквивалентности логики предикатов.
19. Предварённая нормальная форма.
20. Исчисление предикатов. Аксиомы, правила вывода. Формальные доказательства.
21. Формальные выводы в исчислении предикатов.
22. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов.
23. Понятие о теореме Гёделя. Неполнота формальной арифметики.
24. Понятие о теореме Лёвенгейма-Скулема.
25. Понятие о теореме Эрбрана.
26. Понятие о неклассических логиках.
27. Логическое программирование.
28. Исчисление предикатов с равенством.

Задания для контрольных работ

По дисциплине "Математическая логика и теория алгоритмов"

Контрольная работа 1.

Выявить пропозициональную логическую форму следующих рассуждений. Оценить их правильность с привлечением правил вывода или метода истинностных таблиц:

Если равнодействующая всех сил, действующих на движущееся тело не равна 0, то оно движется неравномерно или непрямолинейно, так как известно, что если эта равнодействующая равна 0, то тело движется равномерно и прямолинейно.

Если бы он не пошел в кино, то он не получил бы двойки. Если бы он подготовил домашнее задание, то он не пошел бы в кино. Он получил двойку. Значит, он не подготовил домашнее задание.

Если все посылки истинны и рассуждение правильно, то заключение истинно. В данном рассуждении заключение ложно. Значит, или рассуждение неправильно, или не все посылки истинны.

Если аргументы некоторого рассуждения истинны, а его тезис не является таковым, то рассуждение ? неправильно. Данное рассуждение правильно и его аргументы истинны. Следовательно, его тезис является истинным.

Докажите, что если натуральное число оканчивается на 0 и сумма цифр его кратна 3, то само это число кратно 15. Используйте при этом следующие посылки: если число оканчивается на 0, то оно кратно 5; если сумма цифр числа кратна 3, то само число будет кратным 3; если число кратно 5 и кратно 3, то оно кратно 15.

Если нельзя получить воду, то неверно, что имелся в наличии водород и оксид магния. Если имеется углерод, но углекислого газа получить не удалось, то не было в наличии кислорода. Если имеется углекислый газ и вода, то можно получить углекислоту. Можно ли получить углекислоту, если имеется в наличии оксид магния, кислород, водород и углерод?

Если число  $d$  является положительным, то его квадрат также является положительным числом. Если число  $d$  является отрицательным, то квадрат  $d$  ? положительное число. Пусть число  $d$  ? положительное или отрицательное число. Тогда квадрат числа  $d$  ? положительное число.

Курс акций падает, если процентные ставки растут. Большинство владельцев акций разоряется, если курс акций падает. Следовательно, если процентные ставки растут, то большинство владельцев акций разоряется.

Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возрастет. Следовательно, правительственные расходы не возрастут.

Если государственные дотации сокращаются или происходит спад производства, то в случае массовых увольнений резко возрастает число безработных. Наблюдается спад производства и происходят массовые увольнения. Значит, резко возрастает число безработных.

Прямые  $a$  и  $b$  или параллельны, или пересекаются, или скрещиваются. Если прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости, то они не скрещиваются. Прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости и не пересекаются. Следовательно,  $a$  и  $b$  параллельны.

А.П. Бородин занимался химией, или он сочинял музыку. А.П. Бородин сочинял музыку или он писал детективные романы. Неверно, что А.П. Бородин писал детективные романы. Поэтому, А.П. Бородин занимался химией.

Если твердое вещество имеет определенную точку плавления, то оно не находится в аморфном состоянии. Если вещество обладает кристаллической структурой, то оно имеет определенную точку плавления. Следовательно, если вещество находится в аморфном состоянии, то оно не обладает кристаллической структурой".

Если президент рассчитывает на поддержку профсоюзов, то он подпишет данный закон. Если президент рассчитывает на поддержку бизнесменов, то он наложит на данный закон вето. Президент не подпишет этот закон или не наложит на него вето. Следовательно, он не сможет рассчитывать на поддержку профсоюзов или не сможет рассчитывать на поддержку бизнесменов.

## Контрольная работа 2

Выразить с помощью логики предикатов следующие утверждения.

- 1) Каждый студент использует какой-нибудь компьютер, и по крайней мере один компьютер используется каждым студентом. (Использовать только предикаты СТУДЕНТ, КОМПЬЮТЕР и ИСПОЛЬЗУЕТ.)
- 2) Каждый год некоторые студенты-мужчины проваливают каждый экзамен, но каждый студент-женщина сдает какой-нибудь экзамен. (Использовать только предикаты СТУДЕНТ, МУЖЧИНА, ЖЕНЩИНА, СДАЕТ, ЭКЗАМЕН, ГОД.)
- 3) Каждый мужчина любит какую-нибудь женщину, которая любит другого мужчину. (Используйте только предикаты МУЖЧИНА, ЖЕНЩИНА, ЛЮБИТ и =.)
- 4) Не существует двух философов, которые любили бы одну и ту же книгу. (Использовать только предикаты ФИЛОСОФ, КНИГА, ЛЮБИТ и =.)
- 5) Волки боятся друг друга.
- 6) Волки и люди боятся друг друга.
- 7) Некоторые парни и девушки влюблены друг в друга.
- 8) Все доисторические ящеры поедали друг друга.
- 9) Все делегаты конференции - профсоюзные и партийные активисты.
- 10) Функция  $f(x)$  равна нулю только в точке  $A$ .

## 7.1. Основная литература:

1. Клини, Стивен Коул. Математическая логика / С. К. Клини; пер. с англ. Ю. А. Гастева; под ред. Г. Е. Минца; предисл. Ю. А. Гастева и Г. Е. Минца. ?Изд. 4-е.?Москва: URSS: ЛКИ, 2008.?480 с
2. Громкович, Ю. Теоретическая информатика: Введение в теорию автоматов, теорию вычислимости, теорию сложности, теорию алгоритмов, рандомизацию, теорию связи и криптографию / Юрай Громкович; Пер. с нем.; Под ред. Б. Ф. Мельникова. ?Издание 3-е.?Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2010.?336 с
3. Математическая логика: Учебное пособие / В.И. Игошин. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 399 с. URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=242738>
4. Введение в логику: Учебник / В.А. Бочаров, В.И. Маркин. - 2-е изд., доп. и испр. - М.: ИД ФОРУМ: ИНФРА-М, 2011. - 560 с. URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=264965>
5. Методы научного познания: Учебное пособие / С.А. Лебедев. - М.: Альфа-М: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 272 с. URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=450183>

## **7.2. Дополнительная литература:**

1. Поздняков, С. Н. Дискретная математика: учебник для студ. вузов / С. Н. Поздняков, С. В. Рыбин. ?Москва: Академия, 2008.?448 с
2. Успенский, В. А. Вводный курс математической логики: [учеб. пособие] / В.А.Успенский, Н.К.Верещагин, В.Е.Плиско. ?[2-е изд.].?Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.?125 с.

## **7.3. Интернет-ресурсы:**

Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>  
образовательный математический сайт - <http://www.exponenta.ru/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>  
Портал образовательных математических ресурсов - <http://www.allmath.com/>  
Сайт с учебными материалами по математике - <http://mathelp.spb.ru>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Математическая логика" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010400.62 "Прикладная математика и информатика" и профилю подготовки Численные методы .

Автор(ы):

Замов Н.К. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.