

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

**Программа дисциплины**  
Метод конечных элементов Б3.ДВ.2

Направление подготовки: 010400.62 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: Численные методы

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Тимербаев М.Р.

**Рецензент(ы):**

Карчевский М.М.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " 201 \_\_\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК № \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " 201 \_\_\_\_ г

Регистрационный № 985514

Казань  
2014

## **Содержание**

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (доцент) Тимербаев М.Р. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики , Marat.Timerbaev@kpfu.ru

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины "Метод конечных элементов" является подготовка квалифицированных специалистов в области применения метода конечных элементов для моделирования полей различной физической природы, описываемых уравнениями математической физики.

## 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б3.ДВ.2 Профессиональный" основной образовательной программы 010400.62 Прикладная математика и информатика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 4 курсе, 7 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 4 курсе в 7 семестре для студентов обучающихся по направлению "Прикладная математика и информатика".

Изучение основывается на результатах изучения дисциплин "Алгебра и геометрия", "Математический анализ", "Дополнительные главы математической физики".

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии
ПК-5 (профессиональные компетенции)	способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным, социальным и этическим проблемам
ПК-9 (профессиональные компетенции)	способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая: разработку алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

теоретические знания о понятиях и задачах, связанных с аппроксимацией функциональных пространств Соболева.

2. должен уметь:

понимать и применять на практике компьютерные технологии для решения различных задач линейной алгебры, функционального анализа.

3. должен владеть:

навыками самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с численным решением краевых задач математической физики методом конечных элементов.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

применять полученные знания и навыки в своей профессиональной деятельности

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 7 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.	7	1	0	1	0	домашнее задание
2.	Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.	7	2	0	1	0	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
3.	Тема 3. Метод Ритца. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.	7	2	0	2	0	домашнее задание
4.	Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбла- Гильберта.	7	3	0	2	0	домашнее задание
5.	Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.	7	3	0	2	0	домашнее задание
6.	Тема 6. Интерполяция в $R^n$ . Разрешимость задачи.	7	4	0	2	0	домашнее задание
7.	Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $C_k$	7	4	0	2	0	контрольная работа домашнее задание
8.	Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени $m$ .	7	5	0	2	0	домашнее задание
9.	Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы	7	6	0	2	0	домашнее задание
10.	Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)	7	7	0	2	0	домашнее задание
11.	Тема 11. Конечный элемент Белла класса $C_1$	7	8	0	2	0	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
12.	Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам С0 и С1.	7	8	0	2	0	домашнее задание
13.	Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.	7	9	0	2	0	домашнее задание
14.	Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.	7	10	0	2	0	домашнее задание
15.	Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.	7	10	0	2	0	домашнее задание
16.	Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.	7	11	0	2	0	домашнее задание
17.	Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.	7	11	0	2	0	домашнее задание
18.	Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .	7	12	0	2	0	домашнее задание
19.	Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.	7	12	0	2	0	домашнее задание
20.	Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.	7	13	0	2	0	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
21.	Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.	7	13	0	2	0	домашнее задание
22.	Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.	7	14	0	2	0	домашнее задание контрольная работа
23.	Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.	7	15	0	2	0	домашнее задание
24.	Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.	7	15	0	2	0	домашнее задание
25.	Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.	7	16	0	2	0	домашнее задание
26.	Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.	7	17	0	2	0	домашнее задание
27.	Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.	7	17	0	2	0	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
28.	Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.	7	18	0	2	0	домашнее задание
.	Тема . Итоговая форма контроля	7		0	0	0	экзамен
	Итого			0	54	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.**

**практическое занятие (1 часа(ов)):**

Рассмотрение двухточечной краевой задачи. Ее аппроксимация простейшими конечными элементами.

**Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.**

**практическое занятие (1 часа(ов)):**

Примеры вариационных задач в гильбертовом пространстве. Понятие билинейной положительно определенной формы и ассоциированного с ней линейного положительно определенного оператора. Разрешимость вариационной задачи (лемма Лакса-Мильграма).

**Тема 3. Метод Ритца. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Различные подходы приближенного решения вариационной задачи в гильбертовом пространстве. Метод Галеркина.

**Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбла- Гильберта.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Понятие слабой, или обобщенной, производной. Пространства Соболева функций, имеющие интегрируемые с квадратом обобщенные производные. Различные эквивалентные нормировки. Примеры.

**Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Понятие слабого решения краевой эллиптической задачи, основанное на понятии обобщенной производной. Корректность постановки обобщенной задачи.

**Тема 6. Интерполяция в  $R^n$ . Разрешимость задачи.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Полиномы и кусочные полиномы в  $R^n$ . Интерполяция полиномами в  $R^n$ .

**Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу  $C_k$**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Конечный элемент как множество в  $R^n$  с заданным набором узлов и полиномов. Понятие унисольвентности. Классы гладкости конечных элементов.

## **Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени m.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Семейства аффинно-эквивалентных конечных элементов, определяемых базисным, или ссылочным, конечным элементом. Примеры: прямоугольный и треугольный лагранжевые элементы степени m.

## **Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Уменьшение числа узлов и базисных функций для прямоугольного лагранжевого конечного элемента.

## **Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Использование производных в качестве степеней свободы конечного элемента. Пример: эрмитов кубический конечный элемент в одномерном и двумерном случаях.

## **Тема 11. Конечный элемент Белла класса C1**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Треугольный конечный элемент, использующий в качестве степеней свободы частные производные до 2-го порядка в каждой вершине - треугольник Белла с 18-ю степенями свободы.

## **Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам C0 и C1.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Триангуляция области на конечные элементы классов C0 и C1.

## **Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Условие невырождения, или регулярности, семейств конечных элементов.

## **Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Достаточные условия регулярности семейств триангуляций расчетной области на конечные элементы.

## **Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Триангуляция криволинейной области с использованием вблизи границы криволинейных конечных элементов.

## **Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Пример криволинейных конечных элементов: изопараметрические конечные элементы.

## **Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Ассоциированное с триангуляцией расчетной области пространство конечных элементов. Пространства лагранжевых и эрмитовых элементов треугольных конечных элементов.

## **Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Приближение кусочными полиномами функций из пространств Соболева.

## **Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.**

### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Оператор локальной полиномиальной интерполяции на базисном элементе. Оценка ошибки интерполяции на базисном элементе. Ошибка интерполяции для аффинно-эквивалентных элементов.

**Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Аппроксимация на криволинейных и изопараметрических элементах. Оценки ошибки.

**Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Аппроксимация конечными элементами эллиптических краевых задач в многоугольных областях и в областях с кусочно-гладкой границей. Оценки погрешности конечно-элементной аппроксимации.

**Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Применение изопараметрических конечных элементов для аппроксимации задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей. Погрешность аппроксимации.

**Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Приближенное вычисление интегралов в методе конечных элементов. Квадратурные формулы для треугольных и прямоугольных элементов. Влияние численного интегрирования на погрешность приближения.

**Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Нумерация узлов и конечных элементов триангуляции. Матрица связности локальной и глобальной нумерации.

**Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Генерирование результирующей системы МКЭ. Различные алгоритмы сборки матрицы и правой части системы.

**Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Влияние главных и естественных краевых условий на вариационную постановку задачи и их учет в результирующей системе МКЭ.

**Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Применение различных подходов для вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для треугольных и прямоугольных конечных элементов.

**Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Алгебраические аспекты метода конечных элементов. Ограниченностя применения прямых методов решения систем уравнений МКЭ. Многоуровневые итерационные методы для систем МКЭ: многосеточные методы, методы декомпозиции области.

#### **4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.	7	1	подготовка домашнего задания	1	домашнее задание
2.	Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.	7	2	Домашняя работа	1	Домашняя работа
3.	Тема 3. Метод Ритца. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.	7	2	Домашняя работа	2	Домашняя работа
4.	Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбла-Гильберта.	7	3	Домашняя работа	2	Домашняя работа
5.	Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.	7	3	Домашняя работа	2	Домашняя работа
6.	Тема 6. Интерполяция в $R^n$ . Разрешимость задачи.	7	4	Домашняя работа	2	Домашняя работа
7.	Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $C_k$	7	4	Домашняя работа	1	Домашняя работа
				подготовка к контрольной работе	1	контрольная работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
8.	Тема 8. Определение базисного конечного элемента. 8. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени $m$ .	7	5	Домашняя работа	2	Домашняя работа
9.	Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы	7	6	Домашняя работа	2	Домашняя работа
10.	Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)	7	7	Домашняя работа	2	Домашняя работа
11.	Тема 11. Конечный элемент Белла класса $C1$	7	8	Домашняя работа	2	Домашняя работа
12.	Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам $C0$ и $C1$ .	7	8	Домашняя работа	2	Домашняя работа
13.	Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.	7	9	Домашняя работа	2	Домашняя работа
14.	Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.	7	10	Домашняя работа	2	Домашняя работа
15.	Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.	7	10	Домашняя работа	2	Домашняя работа
16.	Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.	7	11	Домашняя работа	2	Домашняя работа
17.	Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.	7	11	Домашняя работа	2	Домашняя работа
18.	Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .	7	12	Домашняя работа	2	Домашняя работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
19.	Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.	7	12	Домашняя работа	2	Домашняя работа
20.	Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.	7	13	Домашняя работа	2	Домашняя работа
21.	Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.	7	13	Домашняя работа	2	Домашняя работа
22.	Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.	7	14	Домашняя работа	1	Домашняя работа
				подготовка к контрольной работе	1	контрольная работа
23.	Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.	7	15	Домашняя работа	2	Домашняя работа
24.	Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.	7	15	Домашняя работа	2	Домашняя работа
25.	Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.	7	16	Домашняя работа	2	Домашняя работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
26.	Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.	7	17	Домашняя работа	2	Домашняя работа
27.	Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.	7	17	Домашняя работа	2	Домашняя работа
28.	Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.	7	18	Домашняя работа	2	Домашняя работа
	Итого				54	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме практических занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Необходимый теоретический материал излагается на занятиях. Причем конспект, который остается у студента в результате прослушивания материала не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Дополнительно полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.

домашнее задание , примерные вопросы:

Двухточечную краевую задачу свести к вариационной задаче, применяя формулы интегрирования по частям.

### Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Решить систему линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Проверить, что решение совпадает с минимумом квадратичного функционала энергии данной системы.

**Тема 3. Метод Ритца. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для двухточечной краевой задачи применить метод Галеркина, используя базисы двух типов: тригонометрические полиномы и кусочно-линейные функции. Сравнить результаты.

**Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры.**

**Лемма Брамбла- Гильберта.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Вычислить обобщенные производные заданных функций. Вычислить их соболевские нормы.

**Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для заданной правой части показать, что решение краевой задачи в классическом смысле не существует, а в обобщенной постановке решение существует и единственно.

**Тема 6. Интерполяция в  $R^n$  . Разрешимость задачи.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для заданных узлов и заданных в них значениях построить интерполяционный полином.

**Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу  $C_k$**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Выписать узловой базис конечного элемента лагранжевого типа в одномерном случае.

контрольная работа , примерные вопросы:

Для конкретных прямоугольных и треугольных конечных элементов применить критерии принадлежности конечного элемента к классу  $C_k$ .

**Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени  $m$ .**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Выписать узловой базис треугольного конечного элемента лагранжевого типа. Выписать узловой базис прямоугольного конечного элемента лагранжевого типа.

**Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Выписать базис неполного прямоугольного конечного элемента лагранжевого типа.

**Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Выписать узловой базис конечного элемента эрмитового типа в одномерном случае.

**Тема 11. Конечный элемент Белла класса  $C_1$**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Выписать узловой базис треугольного конечного элемента Белла (18 базисных функций).

**Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам  $C_0$  и  $C_1$ .**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для одномерных конечных элементов проверить их принадлежность классам  $C_0$  и  $C_1$ .

**Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для заданного семейства одномерных конечных элементов проверить выполнение условия регулярности.

**Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Построить аффинное отображение базисного треугольного конечного элемента в произвольный.

**Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Построить отображение треугольного конечного элемента на криволинейный.

**Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Построить отображение треугольного конечного элемента на изопараметрический.

**Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Построить глобальный базис пространства конечных элементов в одномерном случае.

**Тема 18. Аппроксимация подпространств  $H_k$ ,  $k=1,2$ .**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для заданной функции пространства Соболева вычислить наилучшее приближение в соболевской норме.

**Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для заданной функции оценить погрешность интерполяции полиномами.

**Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для заданной функции оценить погрешность интерполяции на криволинейном конечном элементе.

**Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Составить систему уравнений МКЭ в прямоугольной области.

**Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Составить систему уравнений МКЭ в круговой области.

контрольная работа , примерные вопросы:

Для задачи Дирихле с оператором Лапласа в круговой области оценить необходимое число конечных элементов для получения заданной точности приближенного решения.

**Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Выписать систему МКЭ с линейными элементами в одномерном случае для квадратур прямоугольников и трапеций.

**Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Для заданной триангуляции выписать матрицу связности.

**Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Написать процедуру сборки системы МКЭ в Матлаб.

## **Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Написать процедуру сборки системы МКЭ в Матлаб, учитывающую краевые условия разных типов.

## **Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Написать процедуру вычисления локальных матриц жесткости и локальных векторов сил в Матлаб.

## **Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Написать программу в Матлаб решения системы МКЭ методом сопряженных градиентов.

## **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

По данной дисциплине предусмотрено проведение экзамена. Примерные вопросы для экзамена - Приложение1.

Постановка краевой задачи в вариационном виде. Метод Галеркина аппроксимации вариационной задачи в гильбертовом пространстве.

Основные аспекты метода Галеркина: выбор аппроксимирующего подпространства, выбор базиса, генерирование системы

линейных алгебраических уравнений, ее решение прямым или итерационным методом.

Понятие конечного элемента в одномерном, двумерном, общем случае. Триангуляция расчетной области, условие регулярности семейства триангуляций.

Пространства конечных элементов. Локальный и глобальный базис. Локальная и глобальная интерполяция, оценки погрешности интерполяции.

Аппроксимация конечными элементами функций пространств Соболева, оценки погрешности аппроксимации. Применение пространств конечных элементов

для аппроксимации краевых задач. Локальные и глобальные матрицы жесткости и вектора сил. Алгоритмы сборки систем МКЭ.

Учет существенных и естественных краевых условий в вариационной постановке задачи. Учет существенных и естественных краевых условий в системе МКЭ.

Прямые методы решения систем МКЭ: метод Гаусса, LU-разложение, метод Холесского.

Итерационные методы решения систем МКЭ: метод сопряженных

градиентов с предобусловливанием, многосеточные методы, методы декомпозиции области.

### **7.1. Основная литература:**

1. Даутов Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика" и по направлению "Прикладная математика и информатика" /

Р. З. Даутов , М. М. Карчевский.?Изд. 2-е, испр..?Казань: Казанский университет, 2011.?237 с.: ил.; 21.?

Библиогр.: с. 228-229 (25 назв.).?Предм. указ.: с. 234-237.?ISBN 978-5-98180-993-4.

2. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов:

[Учебное пособие]. - Казань: Казанский университет. 2012. - 240 с. (с грифом УМО).  
[http://kpfu.ru/publication?p\\_id=47325](http://kpfu.ru/publication?p_id=47325).

3. Даутов Р.З. Метод Галеркина с возмущениями для задач на собственные значения.  
[Учебное пособие]. - Казань, 2010. - 94 с.[http://kpfu.ru/publication?p\\_id=21045](http://kpfu.ru/publication?p_id=21045)

## 7.2. Дополнительная литература:

1. Стрэнг, Гилберт. Теория метода конечных элементов. / Г. Стрэнг, Дж. Фикс; под ред. Г. И. Марчука; пер. с англ. В. И Агошкова [и др.].?М.: Мир, 1977.?348 с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 324-335.?Имен. указ.: с. 342-344.?Предм. указ.: с. 345-347.
2. Ильин В. П. Методы и технологии конечных элементов / В.П. Ильин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т вычисл. математики и мат. геофизики.?Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2007.?370 с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 357-361 (71 назв.).?Предм. указ.: с. 362-367.?ISBN 978-5-901548-30-1, 460.
3. Репченков В. И. Физические основы метода конечных элементов: пособие для студентов механико-математического факультета / В. И. Репченков, Ю. Е. Нагорный.?Минск: БГУ, 2009.?90, [1] с.: ил.; 20.?Библиогр.: с. 89.?ISBN 978-985-518-194-2, 100.
4. Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: перевод с английского / Ф. Съярле; Под ред. Н. Н. Яненко; Пер. Б. И. Класов.?Москва: Мир, 1980.?512с.
5. Деклу Ж. Методы конечных элементов / Ж. Деклу.?Москва: Мир, 1976.?95с.

## 7.3. Интернет-ресурсы:

Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал образовательных математических ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Сайт образовательных ресурсов по математике - <http://www.exponenta.ru/>

Сайт с учебными материалами по математике - <http://mathhelp.spb.ru>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Метод конечных элементов" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Практические занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом или маркером.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010400.62 "Прикладная математика и информатика" и профилю подготовки Численные методы .

Автор(ы):

Тимербаев М.Р. \_\_\_\_\_  
"\_\_\_" 201 \_\_\_ г.

Рецензент(ы):

Карчевский М.М. \_\_\_\_\_  
"\_\_\_" 201 \_\_\_ г.