

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Численные методы математической физики Б3.В.6

Направление подготовки: 010400.62 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: Системное программирование, математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: второе высшее

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Конюхов В.М.

**Рецензент(ы):**

Бахтиева Л.У.

### **СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Плещинский Н. Б.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 985114

Казань  
2014

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (доцент) Конюхов В.М. Кафедра прикладной математики отделение прикладной математики и информатики , Vladimir.Konyukhov@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Цель курса: ознакомить студентов с численными методами решения прикладных задач газовой динамики, двухфазной фильтрации, тепломассопереноса при течении многофазных смесей с фазовыми переходами и т.д., сводящихся к многомерным уравнениям эллиптического, параболического или гиперболического типа; изучить принципы построения итерационных алгоритмов решения нелинейных систем алгебраических уравнений и линейных систем уравнений с разреженными матрицами.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б3.В.6 Профессиональный" основной образовательной программы 010400.62 Прикладная математика и информатика и относится к вариативной части. Осваивается на 2, 3 курсах, 4, 5 семестры.

Дисциплина Б3.В.8 "Численные методы математической физики" относится к профессиональному циклу дисциплин, предназначена для студентов 4 курса (8 семестр). Базируется на знаниях, полученных в рамках дисциплин "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения", "Уравнения математической физики", "Численные методы".

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-10 (профессиональные компетенции)	способность применять в профессиональной деятельности современные языки программирования и языки баз данных, операционные системы, электронные библиотеки и пакеты программ, сетевые технологии
ПК-4 (профессиональные компетенции)	способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности
ПК-5 (профессиональные компетенции)	способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности
ПК-8 (профессиональные компетенции)	способность формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные положения математической физики

2. должен уметь:

строить разностные схемы и схемы метода конечных элементов для решения одно- и многомерных уравнений различного типа;

3. должен владеть:

навыками применения итерационные методы решения систем алгебраических уравнений с разреженными матрицами;

4. должен демонстрировать способность и готовность:

умение проводить анализ разностных схем

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных(ые) единиц(ы) 180 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 4 семестре; экзамен в 5 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Математическое моделирование физических процессов	4	1-4	0	0	10	домашнее задание
2.	Тема 2. Дискретизация области непрерывного изменения аргументов	4	5-8	0	0	8	домашнее задание письменная работа
3.	Тема 3. Консервативные и неконсервативные РС	4	9-12	0	0	8	контрольная работа
4.	Тема 4. Численные методы решения интегро - дифференциаль-ных уравнений	4	13-18	0	0	10	домашнее задание
5.	Тема 5. Методы решения многомерных уравнений	5	1-4	0	0	10	домашнее задание письменная работа

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
6.	Тема 6. Вариационные методы	5	5-8	0	0	8	контрольная точка
7.	Тема 7. Метод конечных элементов (МКЭ)	5	9-12	0	0	8	домашнее задание
8.	Тема 8. Двухфазная фильтрация в пласте (вытеснение нефти водой)	5	13-18	0	0	10	контрольная работа
	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	зачет
	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	экзамен
	Итого			0	0	72	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Математическое моделирование физических процессов

#### *лабораторная работа (10 часа(ов)):*

Общие этапы построения математической модели и ее численной реализации (выбор модели реального физического процесса и основных его параметров, математическое описание идеализированного процесса, конкретизация и замыкание математической модели, построение разностной схемы, выбор метода ее решения, алгоритмизация и составление программы, отладка и тестирование, анализ результатов расчетов)

### Тема 2. Дискретизация области непрерывного изменения аргументов

#### *лабораторная работа (8 часа(ов)):*

Дискретизация области непрерывного изменения аргументов, равномерные и неравномерные сетки, сеточные функции, аппроксимация дифференциальных и интегральных операторов, погрешность аппроксимации. Примеры построения разностных аппроксимаций стационарных и нестационарных дифференциальных уравнений параболического типа с нелинейными свойствами. Явные и неявные РС

### Тема 3. Консервативные и неконсервативные РС

#### *лабораторная работа (8 часа(ов)):*

Изотермические и неизотермические задачи с подвижными границами в газовой динамике. Постановка задач в Эйлеровых и Лагранжевых координатах. Построение консервативных схем интегро-интерполяционным методом и методом сумматорных тождеств на примере этих задач. Анализ построенных схем. Примеры нарушения консервативности РС. Принципы построения полностью консервативных разностных схем

### Тема 4. Численные методы решения интегро - дифференциальных уравнений

#### *лабораторная работа (10 часа(ов)):*

Аппроксимация искоемых функций и ядра, входящих в подынтегральное выражение на примере решения задачи о распределении давления в пласте. Схема решения нелинейного уравнения пьезопроводности. Расчет гидродинамических характеристик жидкостного потока в нефтяной скважине с учетом взаимосвязи с пластом

### Тема 5. Методы решения многомерных уравнений

#### *лабораторная работа (10 часа(ов)):*

Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа в прямоугольной области. Продольно-поперечная схема. Локально-одномерная схема. Аппроксимация и устойчивость схем. Особенности аппроксимации граничных условий. Обобщение на случай произвольной области и анизотропии

### Тема 6. Вариационные методы

#### лабораторная работа (8 часа(ов)):

Слабая формулировка задач (на примере одномерной и двумерной задач теплопроводности). Метод Галеркина. Метод Рунге

### Тема 7. Метод конечных элементов (МКЭ)

#### лабораторная работа (8 часа(ов)):

Построение разбиения области конечными элементами. Линейные преобразования элементов произвольной формы в базисные. Примеры построения базисных функций. Вычисление матрицы жесткости и "вектора сил" на базисном элементе. Построение расширенных векторов и сборка глобальной матрицы жесткости и вектора сил. Методы решения разреженных систем алгебраических уравнений с положительно определенной симметричной матрицей (наискорейшего спуска, сопряженных невязок, разложения Холецкого)

### Тема 8. Двухфазная фильтрация в пласте (вытеснение нефти водой)

#### лабораторная работа (10 часа(ов)):

Конкретизация задачи в случае плоскопараллельной фильтрации в разрезе слоисто-неоднородного пласта. Общие разностные уравнения для двумерной задачи фильтрации. Особенности аппроксимации нелинейного квазистационарного эллиптического уравнения для давления

## 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
5.	Тема 5. Методы решения многомерных уравнений	5	1-4	подготовка домашнего задания	10	домашнее задание
				подготовка к письменной работе	10	письменная работа
6.	Тема 6. Вариационные методы	5	5-8	подготовка к контрольной точке	16	контрольная точка
7.	Тема 7. Метод конечных элементов (МКЭ)	5	9-12	подготовка домашнего задания	16	домашнее задание
8.	Тема 8. Двухфазная фильтрация в пласте (вытеснение нефти водой)	5	13-18	подготовка к контрольной работе	20	контрольная работа
	Итого				72	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Активные и интерактивные формы проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

**Тема 1. Математическое моделирование физических процессов**

**Тема 2. Дискретизация области непрерывного изменения аргументов**

**Тема 3. Консервативные и неконсервативные РС**

**Тема 4. Численные методы решения интегро - дифференциальных уравнений**

**Тема 5. Методы решения многомерных уравнений**

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение литературы по темам: 1. Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа в прямоугольной области. 2. Продольно-поперечная схема. 3. Локально-одномерная схема. 4. Аппроксимация и устойчивость схем. Особенности аппроксимации граничных условий. Обобщение на случай произвольной области и анизотропии.

письменная работа , примерные вопросы:

Подготовка письменного отчета по теме: Эллиптическое уравнение: счет на установление (эволюционная задача).

**Тема 6. Вариационные методы**

контрольная точка , примерные вопросы:

Проверка знаний по темам: 1. Метод Галеркина. 2. Метод Рунге.

**Тема 7. Метод конечных элементов (МКЭ)**

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение литературы по темам: Построение разбиения области конечными элементами. Линейные преобразования элементов произвольной формы в базисные. Примеры построения базисных функций. Вычисление матрицы жесткости и "вектора сил" на базисном элементе. Построение расширенных векторов и сборка глобальной матрицы жесткости и вектора сил. Методы решения разреженных систем алгебраических уравнений с положительно определенной симметричной матрицей (наискорейшего спуска, со-пряженных невязок, разложения Холецкого).

**Тема 8. Двухфазная фильтрация в пласте (вытеснение нефти водой)**

контрольная работа , примерные вопросы:

Проверка знаний по темам: 1. Итерационный метод расчета давления 2. Анализ особенностей решения гиперболического уравнения в одномерном случае

**Тема . Итоговая форма контроля**

**Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету и экзамену:

Приложение 1

**БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТАМ)**

(в зависимости от формы итогового контроля)

**БИЛЕТ N 1**

1. Аппроксимация граничных условий I-III-го рода и их погрешность ап-проксимации. Метод фиктивных точек.
2. Построение консервативных схем интегро-интерполяционным методом на примере задачи об изотермическом течении газа.
3. Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа в прямоугольной области. Продольно-поперечная схема.

**БИЛЕТ N 2**

1. Общие разностные уравнения для двумерной задачи фильтрации.
2. Построение консервативных схем методом сумматорных тождеств на примере стационарной задачи теплопроводности.
3. Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа в прямоугольной области. Локально-одномерная схема.

#### БИЛЕТ N 3

1. Понятие разностной схемы (РС). Явные и неявные РС. Использование явной схемы для построения итерационного алгоритма решения задачи о движении газа.
2. Численные методы решения интегральных уравнений. Аппроксимация искомых функций и ядра, входящих в подынтегральное выражение в задаче о распределении давления в пласте.
3. Аппроксимация и устойчивость продольно-поперечной схемы для уравнений параболического типа в прямоугольной области.

#### БИЛЕТ N 4

1. Общие этапы построения математической модели и ее численной реализации.
2. Разностные схемы бегущего счета ("уголок") с аппроксимацией по потоку и против потока. Геометрическая интерпретация устойчивости схем "уголок".
3. Аппроксимация и устойчивость локально-одномерной схемы для уравнений параболического типа в прямоугольной области.

#### БИЛЕТ N 5

1. Формулы разностного дифференцирования и перехода от одного веса к другому. Разностные схемы с весами.
2. Метод разделения процессов ("динамические" и "тепловые" уравнения). Внутренний и внешний итерационный процессы.
3. Уточнение итераций по давлению при решении эллиптического уравнения в задаче двухфазной фильтрации в слоисто-неоднородном пласте.

#### БИЛЕТ N 6

1. Принципы построения РС повышенной точности.
2. Метод гармоник в исследовании устойчивости явной разностной схемы для однородного одномерного уравнения переноса.
3. Продольно-поперечная схема для уравнений параболического типа. Особенности схемы в случае произвольной области и анизотропии.

#### БИЛЕТ N 7

1. Метод Ньютона решения нелинейных систем алгебраических уравнений.
2. Многопараметрическая разностная схема в задаче об изотермическом течении газа. Выбор параметров схемы в уравнении сохранения энергии.
3. Методы решения эллиптических уравнений. Счет на установление (эволюционная задача).

#### БИЛЕТ N 8

1. Понятие разностной схемы (РС). Погрешность аппроксимации, сходимость и устойчивость РС.
2. Построение РС стационарных и нестационарных дифференциальных уравнений параболического типа с нелинейными свойствами. Особенности аппроксимации нелинейного коэффициента.
3. Вариационные методы. Слабая формулировка задач (на примере одномерной и двумерной задач теплопроводности).

#### БИЛЕТ N 9

1. Решение систем алгебраических уравнений методом пятидиагональной прогонки. Условия устойчивости метода.



2. Принцип построения разностной схемы для уравнения переноса в задаче двухфазной фильтрации с учетом конечности скорости фронта вытеснения.

3. Метод Галеркина. Метод Рунге.

#### БИЛЕТ N 10

1. Аппроксимация граничных условий I - III-го рода. Погрешность аппроксимации. Использование разложения в ряд Тейлора.

2. Численный метод решения нелинейной радиальной задачи пьезопроводности с учетом взаимодействия пласта и скважины. Особенности расчета потока на границе скважины.

3. Метод конечных элементов (МКЭ). Линейные преобразования элементов разбиения произвольной формы в базисные. Принцип построения базисных функций на конечных элементах.

#### БИЛЕТ N 11

1. Применение метода Ньютона для решения нелинейной разностной схемы в задаче об изотермическом течении газа.

2. Параболическая интерполяция при определении функции насыщенности в одномерной задаче двухфазной фильтрации при построении РС для уравнения гиперболического типа.

3. Вычисление матрицы жесткости на базисном элементе. Построение расширенных векторов и сборка глобальной матрицы жесткости.

#### БИЛЕТ N 12

1. Особенности аппроксимации граничных условий продольно-поперечной схемы для уравнений параболического типа в прямоугольной области.

2. Анализ особенностей решения гиперболического уравнения (уравнения переноса насыщенности) в одномерном случае. Разрывность функции насыщенности.

3. Построение консервативных схем методом сумматорных тождеств на примере нестационарной задачи теплопроводности.

#### БИЛЕТ N 13

1. Классификация физических процессов. Краевые и начальные условия. Основные уравнения фильтрации сжимаемой жидкости в однородном пласте. Примеры замкнутых моделей.

2. Условие устойчивости явной разностной схемы для одномерного уравнения переноса в задаче двухфазной фильтрации. Обобщение одномерной схемы на двумерный случай.

3. Вычисление "вектора сил" на базисном конечном элементе. Построение расширенного вектора и сборка глобального вектора сил.

#### БИЛЕТ N 14

1. Законы сохранения массы, количества движения и энергии в интегральной и дифференциальной формах. Уравнения состояния и примеры их задания в различных физических процессах.

2. Принцип максимума в исследовании устойчивости явной разностной схемы для одномерного однородного уравнения переноса.

3. Оценка порядка аппроксимации локально-одномерной схемы для уравнения параболического типа в прямоугольной области.

#### БИЛЕТ N 15

1. Неравномерные сетки, сеточные функции, аппроксимация дифференциальных и интегральных операторов, погрешность аппроксимации, сходимость и устойчивость РС по норме.

2. Многопараметрическая разностная схема в задаче об изотермическом течении газа. Выбор параметров схемы в уравнении сохранения массы.

3. Дробно-линейная интерполяция при определении функции насыщенности в одномерной задаче двухфазной фильтрации при построении РС для уравнения гиперболического типа.

### 7.1. Основная литература:

1. Широкова Е.А. Уравнения математической физики: методическое пособие / Е. А. Широкова, В. А. Сочнева; ФГАОУВПО "Казан. (Приволж.) федер. ун-т".?Казань: [Казанский университет], 2010.?51 с.
2. Салехова И.Г. Методическое пособие для проведения практических занятий по курсу "Уравнения математической физики" / Казан. (Приволж.) федер. ун-т; [сост.: к.ф.-м.н., доц. И. Г. Салехова, к.ф.-м.н. С. Г. Аблаева].?Казань: [Казанский (Приволжский) федеральный университет], 2010.?149 с.
- 3.Методическое пособие для проведения практических занятий по курсу "Уравнения математической физики" [Текст: электронный ресурс] / Казан. (Приволж.) федер. ун-т ; [сост.: к.ф.-м.н., доц. И. Г. Салехова, к.ф.-м.н. С. Г. Аблаева] .? Электронные данные (1 файл: 1,47 Мб) .? (Казань : Казанский федеральный университет, 2014) .? Загл. с экрана .? Режим доступа: открытый .  
<URL:<http://libweb.ksu.ru/ebooks/publicat/0-785436.pdf>>.
4. Бушманова Г.В. Уравнения математической физики: [учебное пособие] / Г. В. Бушманова; Федер. гос. авт. образоват. учреждение высш. проф. образования "Казан. (Приволж.) федер. ун-т".?[2-е изд., испр.].?Казань: [Казанский университет], 2011.?126 с.
5. Калиткин, Н. Н. Численные методы: учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. ? 2-е изд., исправленное. ? СПб.: БХВ-Петербург, 2011. ? 586 с.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=350803>
- 6.Численные методы. Курс лекций : Учебное пособие/ Срочко В.А. - СПб.: Издательство "Лань", 2010. - 208 с. ISBN 978-5-8114-1014-9 e.lanbook.com  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=378](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=378)
7. Лекции по численным методам математической физики: Учебное пособие / М.В. Абакумов, А.В. Гулин; МГУ им. М.В. Ломоносова - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 158 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (обложка) ISBN 978-5-16-006108-5, 500 экз.  
[www.znanium.com](http://www.znanium.com) <http://znanium.com/go.php?id=364601>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989, 614 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978, 512 с.
3. Конюхов В.М. Дисперсные потоки в нефтяных скважинах. - Казань: Изд-во КГУ. - 1990, 136 с.
4. Конюхов В.М., Храмченков М.Г.Чекалин А.Н. Миграция разноплотностных жидкостей в водоносных пластах сложной структуры - Изд- во Казанского матем. общества, Казань, 2005, 158 с.
5. Волков Ю.А., Конюхов В.М., Костерин А.В., Чекалин А.Н. Математическое моделирование имплозионного воздействия на пласт - Казань: Изд-во "Плу-тон", 2004.
6. Мазо А.Б. Математическое моделирование процессов горячей обработки металлов. - Изд-во Казанский фонд "Математика". - 1996.
7. Чекалин А.Н., Конюхов В.М., Костерин А.В. Двухфазная многокомпонентная фильтрация в нефтяных пластах сложной структуры. - Казань: Изд-во Казан-ского гос. ун-та, 2009. - 180с.
8. Карчевский М.М., Лапин А.В. Некоторые вопросы теории метода конечных элементов. - Изд-во КГУ. - 1995.
9. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. - М.: Наука, 2003.

### 7.3. Интернет-ресурсы:

[www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php) - [www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php)

[www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php) - [www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php)

[www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php) - [www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php)

[www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php) - [www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php)

[www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php) - [www.pm298.ru/mfizika.php](http://www.pm298.ru/mfizika.php)

### **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Численные методы математической физики" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийный класс

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010400.62 "Прикладная математика и информатика" и профилю подготовки Системное программирование, математическое моделирование .

Автор(ы):

Колюхов В.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Бахтиева Л.У. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.