МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт вычислительной математики и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по образовательной деятельности КФУ
Проф. Минзарипов Р.Г.
____
"___"______________20___ г.

Программа дисциплины

Функциональный анализ Б2.Б.3

Направление подготовки: 010400.62 - Прикладная математика и информатика
Профиль подготовки: Математическое моделирование
Квалификация выпускника: бакалавр
Форма обучения: очное
Язык обучения: русский
Автор(ы):
Лапин А.В.
Рецензент(ы):
Гумеров Р.Н.

СОГЛАСОВАНО:
Заведующий(ая) кафедрой: Турилова Е. А.
Протокол заседания кафедры No ___ от "____" ___________ 201__г
Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:
Протокол заседания УМК No ____ от "____" ___________ 201__г

Регистрационный No

Казань
2014

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Лапин А.В. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , Alexandr.Lapin@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоение дисциплины "Функциональный анализ" являются: формирование математической культуры студентов, развитие системного математического мышления. Дисциплина является обобщением на бесконечно-мерный случай идей алгебры, математического анализа и геометрии. Идеи, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают почти все области математики, объединяя ее в единое целое.

Знания, практические навыки, полученные при освоении дисциплины "Функциональный анализ" используются обучаемыми при изучении профессиональных дисциплин, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

1. формирование понимания значимости математической составляющей в естественно-научном образовании бакалавра;

2. ознакомление системы понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов в их взаимосвязи;

3. формирование навыков и умений использования современных математических моделей и методов.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б2.Б.3 Общепрофессиональный" основной образовательной программы 010400.62 Прикладная математика и информатика и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 2 курсе, 4 семестр.

Дисциплина "Функциональный анализ" входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла подготовки бакалавра по направлению "010400.62 Прикладная математика и информатика".

Логическая и содержательно - методическая взаимосвязь с другими дисциплинами и частями ООП выражается в следующем.

Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов "Математический анализ 1", "Математический анализ 2", "Алгебра и геометрия".

Требования к входным знаниям и умениям студента - знание идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры.

Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины "Функциональный анализ" будут использоваться в дальнейшем при освоении следующих дисциплин математического и естественно-научного, профессионального циклов: "Методы оптимизации", "Численные методы", "Уравнения математической физики" и др.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-1 (профессиональные компетенции)	способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов, теорий,

связанных с прикладной математикой и информатикой

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным, социальным и этическим проблемам
ПК-9 (профессиональные компетенции)	способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

разделы функционального анализа, которые традиционно используются при исследовании свойств дифференциальных уравнений с частными производными, при построении численных методов решения задач математической физики, и знакомство с которыми необходимо для математика-прикладника.

2. должен уметь:

практически решать примеры по функциональному анализу.

3. должен владеть:

курсами по нелинейным уравнениям с частными производными и по численным методам решения уравнений математической физики.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

полное ознакомление с теорией и методами функционального анализа.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Системы множеств	4		5	0	5	домашнее задание
2.	Тема 2. Понятие меры	4		5	0	5	домашнее задание
3.	Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса	4		5	0	5	домашнее задание
4.	Тема 4. Измеримые функции	4		5	0	5	домашнее задание
5.	Тема 5. Интеграл Лебега	4		4	0	4	домашнее задание
6.	Тема 6. Интеграл Лебега	4		4	0	4	контрольная работа домашнее задание
7.	Тема 7. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве	4		4	0	4	домашнее задание
8.	Тема 8. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	4		4	0	4	контрольная работа домашнее задание
.	Тема . Итоговая форма контроля	4		0	0	0	экзамен
	Итого			36	0	36	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Системы множеств

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Кольца и алгебры. Операции в кольце множеств. Полукольца и полуалгебры. Свойства полуколец.

лабораторная работа (5 часа(ов)):

Минимальное кольцо, содержащее полукольцо.

Тема 2. Понятие меры

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Определение конечно аддитивной и счетно-аддитивной меры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.

лабораторная работа (5 часа(ов)):

Основные свойства меры: счетная монотонность, полуаддитивность, непрерывность.

Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Внешняя мера. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега. Сигма-алгебра измеримых множеств.

лабораторная работа (5 часа(ов)):

Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой.

Тема 4. Измеримые функции

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Определения и базовые свойства измеримых функций. Простые функции и критерий измеримости. Теорема Егорова.

лабораторная работа (5 часа(ов)):

Сходимость почти всюду. Сходимость почти равномерная (по Егорову). Сходимость по мере.

Тема 5. Интеграл Лебега

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла и его корректность. Счетная аддитивность интеграла Лебега. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

лабораторная работа (4 часа(ов)):

Основные свойства интеграла: линейность, интегрирование неравенств, интегрируемость ограниченной и мажорируемой функции.

Тема 6. Интеграл Лебега

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Теоремы Лебега, Б. Леви и Фату о предельном переходе под знаком интеграла.

лабораторная работа (4 часа(ов)):

Интеграл Лебега на прямой. Сравнение с собственным и несобственным интегралом Римана. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства Лебега.

Тема 7. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Определения и примеры пространств. Сходящиеся последовательности, открытые и замкнутые множества. Сепарабельные пространства. Полные пространства.

лабораторная работа (4 часа(ов)):

Пространство линейных ограниченных операторов.

Тема 8. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Гильбертовы пространства. Ортогональность. Ортогональное разложение пространства. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала.

лабораторная работа (4 часа(ов)):

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Системы множеств	4		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
2.	Тема 2. Понятие меры	4		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
3.	Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса	4		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
4.	Тема 4. Измеримые функции	4		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
5.	Тема 5. Интеграл Лебега	4		подготовка домашнего задания	5	домашнее задание
6.	Тема 6. Интеграл Лебега	4		подготовка домашнего задания	3	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
7.	Тема 7. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве	4		подготовка домашнего задания	5	домашнее задание
8.	Тема 8. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	4		подготовка домашнего задания	3	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
	Итого				36	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствие с планом лекций.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении практических занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому мате-риалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).

2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;

- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Системы множеств

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: кольца и и полукольца; минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Решение задач: построение колец множеств на прямой и на плоскости.

Тема 2. Понятие меры

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Решение задач: построение продолжений мер с полуколец на минимальные кольца множеств на прямой и плоскости.

Тема 3. Мера Лебега, мера Лебега-Стилтьеса

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: сигма-алгебра измеримых множеств. Решение задач: построение классов измеримых множеств с помощью процедуры Лебега с использованием различных функций, порождающих меру.

Тема 4. Измеримые функции

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: сходимость почти всюду, почти равномерная (по Егорову) и по мере; связь между ними. Решение задач: исследование класса измеримых функций и его замкнутости относительно арифметических операций, предельного перехода, вычисления верхних граней.

Тема 5. Интеграл Лебега

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: счетная аддитивность интеграла Лебега. Решение задач: построение примеров последовательностей функций, сходящихся в среднем, по мере, равномерно и взаимосвязь между этими типами сходимости.

Тема 6. Интеграл Лебега

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: предельный переход под знаком интеграла Лебега. Решение задач: сравнение норм различных пространств Лебега (неравенства вложения).

контрольная работа , примерные вопросы:

Примеры вопросов: 1. Найти меру Лебега подмножества отрезка [0,1], состоящего из чисел, у которых в десятичной записи цифра 1 встречается раньше, чем цифра 2. 2. Доказать, что мощность множества измеримых по Лебегу подмножеств отрезка [0,1] больше мощности континуума. 3. Доказать, что всякое множество, расположенное на прямой (даже если множество является неизмеримым на прямой) измеримо на плоскости, которая проходит через эту прямую. 4. Доказать, что всякая точка разрыва функции с ограниченным изменением, есть точка разрыва первого рода. 5. Доказать, что сходимость в среднем влечет сходимость по мере.

Тема 7. Понятие линейного нормированного пространства. Линейные операторы и функционалы в линейном нормированном пространстве

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: пространства Лебега, их полнота и сепарабельность. Решение задач: изучение полноты/неполноты функциональных пространств с различными нормировками; исследование ограниченности оператора дифференцирования в различных парах пространств.

Тема 8. Понятие гильбертова пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

домашнее задание , примерные вопросы:

Углубленное изучение литературы по теме: ортогональное разложение гильбертова пространства; ортогональные системы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Решение задач: построение общих видов линейных ограниченных функционалов в банаховых пространствах последовательностей и функций.

контрольная работа , примерные вопросы:

Примеры вопросов: 1.Доказать, что линеал непрерывно дифференцируемых функций не является подпространством пространства непрерывных функций. 2.Доказать, что скалярное произведение непрерывно относительно сходимости по норме. 3.Доказать, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. 4.Построить скалярное произведение в нормированном пространстве, норма которого удовлетворяет равенству параллелограмма. 5.Привести примеры ортогональных систем в гильбертовом пространстве Лебега на отрезке.

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к экзамену:

Всего по текущей работе студент может набрать 50 баллов.

Студент допускается к экзамену, если он набрал по текущей работе не менее 28 баллов. Минимальное количество баллов по каждому из видов текущей работы составляет половину от максимального.

Тематика домашних самостоятельных работ:

Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарьян К.С., Сифуэнтэс П. Действительный анализ в задачах. - М.: Физматлит, 2005. 416 с.

Вопросы к экзамену.

Часть 1. Теория меры и интеграл Лебега.

1. Определение кольца и полукольца множеств, перечисление их свойств.

2. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо.

3. Определение конечно аддитивной и счетно-аддитивной меры.

4. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.

5. Перечисление основных свойств меры: счетная монотонность, полуаддитивность, непрерывность.

6. Определение внешней меры и измеримого множества.

7. Алгебра измеримых множеств.

8. Определения и базовые свойства измеримых функций.

9. Критерий измеримости функции через предел простых функций.

10. Эквивалентные функции, измеримость.
11. Сходимость почти всюду, измеримость предела.
12. Сходимость почти всюду, "почти равномерная" (по Егорову) и по мере. Связь между ними.
13. Определение интеграла Лебега от простой функции.
14. Общее определение интеграла Лебега и его корректность.
15. Перечисление основных свойств интеграла: линейность, интегрирование неравенств, интегрируемость ограниченной и мажорируемой функции.
16. 1-ая теорема о счетной аддитивности интеграла Лебега (прямое утверждение).
17. Формулировка 2-ой теоремы о счетной аддитивности интеграла Лебега (обратное утверждение).
18. Формулировка результата об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.
19. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
20. Формулировка теорем Б. Леви и Фату.

Часть 2.

1. Определения и примеры нормированных пространств.
2. Последовательности в нормированном пространстве, открытые и за мкнутые множества. Сепарабельные и полные пространства (пространства Банаха).
3. Теорема об эквивалентности норм в конечномерных пространствах.
4. Линеалы и подпространства нормированного пространства.
5. Скалярное произведение. Примеры евклидовых пространств. Сходимость, ограниченность. Гильбертовы пространства.
6. Ортогональное разложение гильбертова пространства.
7. Ортогональные системы и ряды Фурье.
8. Линейные операторы в нормированных пространствах; непрерывность и ограниченность
9. Пространство линейных непрерывных операторов; определение, полнота.
10. Обратный оператор. Лемма о существовании обратного линейного оператора к линейному оператору.
11. Обратный оператор. Две теоремы об ограниченности обратного оператора.
12. Линейные непрерывные функционалы, сопряженное пространство.
13. Теорема Хана-Банаха (формулировка) и следствия.
14. Теорема Рисса о представление функционала в гильбертовом пространстве.
15. Второе сопряженное пространство.
16. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

7.1. Основная литература:

Функциональный анализ, Сидоров, Анатолий Михайлович, 2010г.

2. Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.?Издание 7-е.?Москва: Физматлит, 2006.?572 с.; 22.?(Классический университетский учебник / Ред. совет: пред. В.А. Садовничий).?На авантит.: 250-летию Моск. ун-та.?Предыдущее издание 1989г..?Библиогр.: с. 568-570 (57 назв.).?ISBN 5-9221-0266-4.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Физматлит, 2009. - 572с.
ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206

4. Шерстнев, Анатолий Николаевич. Конспект лекций по математическому анализу: учебное пособие для мат. специальностей и направлений ун-тов / А. Н. Шерстнев.?Издание 4-е .?Казань: Казанский государственный университет, 2005.?373с.: граф.; 29.?Указ. имен., предм., обозначений: с.365-372.?Библиогр.: с.4.?ISBN 5-98180-151-4, 500.

5. Шерстнев, Анатолий Николаевич. Конспект лекций по математическому анализу [Текст: электронный ресурс] / А. Н. Шерстнев.?Изд. 5-е.?Электронные данные (1 файл: 2,66 Мб).?Б.м.: Б.и., 2009.?Загл. с экрана.?Режим доступа: открытый .?

6. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. - М.: Лань, 2008. - 560с

ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284

7. Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. Сборник задач по функциональному анализу. - М.: Лань, 2012. - 192с.

ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3175

8. Антоневич Анатолий Борисович. Задачи и упражнения по функциональному анализу: учебное пособие для студентов мат. спец. вузов / А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно; Под ред. С. Г. Крейна.?Издание 3-е , стереотипное.?Москва: URSS: [КомКнига], [2006].?208 с.; 22 см..?Библиогр.: с. 188-189.?Указ.: с. 190-204.?ISBN 5-484-00285-0.

7.2. Дополнительная литература:

Функциональный анализ и вычислительная математика, Лебедев, Вячеслав Иванович, 2005г.

2 . Насыров, Семен Рафаилович. Метрические и линейные нормированные пространства: задачи к лабораторным занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" / С. Р. Насыров; Казан. гос. ун-т.?Изд. 2-е, испр. и доп..?Казань: [Казанский государственный университет], 2008.?35, [1] с.; 21.

3. Луговая, Г. Д. Функциональный анализ: Специальные курсы: учебное пособие / Г. Д. Луговая, А. Н. Шерстнев.?Москва: URSS: Издательство ЛКИ, 2008 .?256 с.

4. Современная математика. Фундаментальные направления / Российский университет дружбы народов.?Москва: РУДН, 2001-. Т.44: Функциональный анализ.?2012.

5. Канторович, Леонид Витальевич. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов.?4-е изд., испр..?Санкт-Петербург: Нев. Диалект: БХВ-Петербург, 2004.?813,[1] с.; 22.?Предм. указ.: с. 799-806.?Библиогр.: с. 784-798.?ISBN 5-7940-0120-8((Нев. Диалект)).?ISBN 5-94157-597-1((БХВ-Петербург)), 30

7.3. Интернет-ресурсы:

Википедия - http://ru.wikipedia.org

Портал математических интернет-ресурсов - http://www.math.ru/

Портал математических интернет-ресурсов - http://www.exponenta.ru

Портал математических интернет-ресурсов - http://www.allmath.com/

Портал ресурсов по математике, алгоритмике и ИТ - http://algolist.manual.ru/

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Функциональный анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010400.62 "Прикладная математика и информатика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):
Лапин А.В. ____________________
"__" _________ 201 __ г.

Рецензент(ы):
Гумеров Р.Н. ____________________
"__" _________ 201 __ г.