

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.



_____ 20__ г.

подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины
Метод конечных элементов БЗ.ДВ.2

Направление подготовки: 010400.62 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Даутов Р.З.

Рецензент(ы):

Карчевский М.М.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Регистрационный No 978316

Казань
2016

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Даутов Р.З. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики ,
Rafail.Dautov@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины "Метод конечных элементов " является подготовка квалифицированных специалистов в области применения метода конечных элементов для моделирования полей различной физической природы, описываемых уравнениями математической физики.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " БЗ.ДВ.2 Профессиональный" основной образовательной программы 010400.62 Прикладная математика и информатика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 4 курсе, 7 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 4 курсе в 7 семестре для студентов обучающихся по направлению "Прикладная математика и информатика".

Изучение основывается на результатах изучения дисциплин "Алгебра и геометрия", "Математический анализ", "Дополнительные главы физики".

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции | Расшифровка приобретаемой компетенции |
|--|---|
| ПК-2 (профессиональные компетенции) | способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии |
| ПК-5 (профессиональные компетенции) | способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности |
| ПК-7 (профессиональные компетенции) | способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным, социальным и этическим проблемам |
| ПК-9 (профессиональные компетенции) | способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая: разработку алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

теоретические знания о понятиях и задачах, связанных с аппроксимацией функциональных пространств Соболева.

2. должен уметь:

определять слабые решения краевых задач математической физики для эллиптических уравнений второго порядка.

3. должен владеть:

навыками самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с численным решением краевых задач математической физики методом конечных элементов.

умение строить схемы МКЭ произвольного порядка точности для основных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 7 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

| N | Раздел Дисциплины/ Модуля | Семестр | Неделя семестра | Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах) | | | Текущие формы контроля |
|----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---------------------------|
| | | | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | |
| 1. | Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка. | 7 | | 0 | 1 | 0 | домашнее задание |
| 2. | Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала. | 7 | | 0 | 1 | 0 | домашнее задание |
| 3. | Тема 3. Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |

| N | Раздел Дисциплины/ Модуля | Семестр | Неделя семестра | Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах) | | | Текущие формы контроля |
|-----|--|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|--|
| | | | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | |
| 4. | Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля-Гильберта. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 5. | Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи. | 7 | | 0 | 2 | 0 | контрольная работа домашнее задание |
| 6. | Тема 6. Интерполяция в R_n . Разрешимость задачи. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 7. | Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу S_k | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 8. | Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени m . | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 9. | Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 10. | Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный) | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 11. | Тема 11. Конечный элемент Белла класса S_1 | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 12. | Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам S_0 и S_1 . | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |

| N | Раздел Дисциплины/ Модуля | Семестр | Неделя семестра | Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах) | | | Текущие формы контроля |
|-----|--|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|--|
| | | | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | |
| 13. | Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 14. | Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 15. | Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 16. | Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 17. | Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 18. | Тема 18. Аппроксимация подпространств H_k , $k=1,2$. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 19. | Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов. | 7 | | 0 | 2 | 0 | контрольная работа домашнее задание |
| 20. | Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 21. | Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |

| N | Раздел Дисциплины/ Модуля | Семестр | Неделя семестра | Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах) | | | Текущие формы контроля |
|-----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|--|
| | | | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | |
| 22. | Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 23. | Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 24. | Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 25. | Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов. | 7 | | 0 | 2 | 0 | контрольная работа домашнее задание |
| 26. | Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 27. | Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| 28. | Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем. | 7 | | 0 | 2 | 0 | домашнее задание |
| . | Тема . Итоговая форма контроля | 7 | | 0 | 0 | 0 | экзамен |
| | Итого | | | 0 | 54 | 0 | |

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.

практическое занятие (1 часа(ов)):

Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка. Формирование системы МКЭ, оценка точности метода

Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.

практическое занятие (1 часа(ов)):

Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала. Примеры задач, исследование свойств операторов, применение леммы Лакса-Мильграма для исследования разрешимости этих задач.

Тема 3. Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями. Структура системы алгебраических уравнений. Базисы с локальным носителем, разреженные системы алгебраических уравнений.

Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля- Гильберта.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки этих пространств. Примеры эквивалентных норм в пространствах Соболева первого и второго порядков. Доказательство леммы Брамбля- Гильберта. Неравенства Фридрихса, Пуанкаре.

Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Исследование свойства форм, определяющих обобщенное решение. Существование обобщенного решения. Корректность обобщенной задачи.

Тема 6. Интерполяция в R_n . Разрешимость задачи.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Задача интерполяции в в одномерном и многомерном случаях. Разрешимость задачи интерполяции. Примеры задач интерполяции на базисном треугольнике и квадрате.

Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу S_k

практическое занятие (2 часа(ов)):

Определение конечного элемента как тройки. Примеры конечных элементов. Критерии принадлежности конечного элемента к классу S_k . Примеры конечных элементов классов S_0 и S_1 .

Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени m .

практическое занятие (2 часа(ов)):

Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени m .

Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы

практическое занятие (2 часа(ов)):

Неполные прямоугольные лагранжевые элементы. Неполный квадратичный элемент. Алгоритм определения произвольного неполного элемента. Симметричные неполные элементы.

Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)

практическое занятие (2 часа(ов)):

Определение Эрмитова кубического конечного элемента. Примеры одномерных элементов. Примеры двумерного прямоугольного Эрмитова элемента. Треугольные эрмитовы элементы.

Тема 11. Конечный элемент Белла класса С1

практическое занятие (2 часа(ов)):

Определение конечного элемента Белла класса С1. Доказательство униразрешимости. Определение степеней свободы конечного элемента.

Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам С0 и С1.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Ассоциированные конечные элементы. Критерии принадлежности ассоциированных конечных элементов к классам С0 и С1. Примеры ассоциированных элементов в одномерном и двумерном случаях.

Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Определение регулярности семейства ассоциированных конечных элементов. Регулярность семейства треугольных конечных элементов. Регулярность семейства прямоугольных конечных элементов.

Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность. Регулярность триангуляции. Критерии регулярности семейства аффинно-эквивалентных элементов.

Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Криволинейные элементы. Регулярность. Критерии регулярности семейства криволинейных элементов.

Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Изопараметрические элементы. Регулярность. Критерии регулярности семейства изопараметрических элементов.

Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.

Тема 18. Аппроксимация подпространств H_k , $k=1,2$.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Аппроксимация подпространств H_k , $k=1,2$ на основе Лагранжевых и Эрмитовых конечных элементов. Учет краевых условий.

Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Замена переменных в нормах пространства Соболева. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов. Рассмотрение конкретных примеров.

Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов. Рассмотрение конкретных примеров.

Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Метод конечных элементов для уравнений в многоугольных областях на основе аффинных элементов. МКЭ для уравнений в областях с кусочно-гладкой границей на основе криволинейных конечных элементов. Оценки точности решения соответствующих схем МКЭ.

Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.

практическое занятие (2 часа(ов)):

МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей на основе изопараметрических конечных элементов. Примеры схем. Оценки точности решения соответствующих схем МКЭ.

Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Квадратурные формулы для вычисления интегралов по треугольной и четырехугольной области. Определение схем МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость схем, получение оценок точности.

Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ. Матрица связности элементов. Способы хранения разреженных матриц.

Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Алгоритм сборки системы МКЭ в случае однородной задачи Неймана. Вычисление матрицы жесткости на примере оператора Лапласа и линейных треугольных элементов. Бариецентрические координаты. Вычисление градиента базисных функций.

Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Учет главных и естественных краевых условий в алгоритме сборки системы МКЭ. Алгоритмы и программная реализация на примере линейных элементов.

Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Локальная матрица жесткости. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа. Рассмотрение конкретных примеров.

Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Обзор методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Прямые и итерационные методы для решения разреженных систем алгебраических уравнений. Методы Гаусса и сопряженных градиентов.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

| N | Раздел Дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|----|---|---------|--------------------|--|---------------------------|---|
| 1. | Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка. | 7 | | Домашняя работа | 1 | Домашняя работа |
| 2. | Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала. | 7 | | Домашняя работа | 1 | Домашняя работа |
| 3. | Тема 3. Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 4. | Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля-Гильберта. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 5. | Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи. | 7 | | Домашняя работа | 1 | Домашняя работа |
| | | | | подготовка к контрольной работе | 1 | контрольная работа |
| 6. | Тема 6. Интерполяция в R^n . Разрешимость задачи. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 7. | Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу S_k | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |

| N | Раздел Дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоёмкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|---|---------|--------------------|--|---------------------------|---|
| 8. | Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени m . | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 9. | Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 10. | Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный) | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 11. | Тема 11. Конечный элемент Белла класса $C1$ | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 12. | Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам $C0$ и $C1$. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 13. | Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 14. | Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 15. | Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 16. | Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 17. | Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 18. | Тема 18. Аппроксимация подпространств H_k , $k=1,2$. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |

| N | Раздел Дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|--|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 19. | Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов. | 7 | | Домашняя работа | 1 | Домашняя работа |
| | | | | подготовка к контрольной работе | 1 | контрольная работа |
| 20. | Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 21. | Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 22. | Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 23. | Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 24. | Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 25. | Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов. | 7 | | Домашняя работа | 1 | Домашняя работа |
| | | | | подготовка к контрольной работе | 1 | контрольная работа |

| N | Раздел Дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|--|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 26. | Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 27. | Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| 28. | Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем. | 7 | | Домашняя работа | 2 | Домашняя работа |
| | Итого | | | | 54 | |

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме практических занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на занятиях. Причем конспект лекций, который остается у студента не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Формы записи линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Виды и формы записи краевых условий. Простейшая схема МКЭ для первой краевой задачи для ОДУ второго порядка.

Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение пространства Гильберта. Определение линейных и билинейных форм и их непрерывности. Формулировка леммы Лакса-Мильграма.

Тема 3. Метод Ритца. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение метода Ритца. Определение метода Галеркина. Примеры конечномерных пространств и выбор базисных функций в них.

Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбла- Гильберта.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение пространств Соболева. Пространство H^1 . Примеры эквивалентных норм в H^1 . Формулировка леммы Брамбла- Гильберта.

Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Определение обобщенного решения задачи Неймана для уравнения Пуассона.

контрольная работа , примерные вопросы:

Доказать ограниченность заданной линейной и билинейной формы. Доказать коэрцитивность заданной билинейной формы. Доказать обобщенную разрешимость заданной краевой задачи.

Тема 6. Интерполяция в R^n . Разрешимость задачи.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Интерполяционный полином Лагранжа. Линейная интерполяция функций на треугольнике. Билинейная интерполяция функций на прямоугольнике. Квадратичная интерполяция функций на треугольнике. Биквадратичная интерполяция функций на прямоугольнике.

Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу S_k

Домашняя работа , примерные вопросы:

Указать конечные элементы из заданного набора и обосновать выбор.

Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени m .

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить явные формулы для базисных функций а) линейного б) квадратичного треугольного элемента. Получить явные формулы для базисных функций а) билинейного б) биквадратичного прямоугольного элемента.

Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить явные формулы для базисных функций квадратичного неполного прямоугольного элемента.

Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить явные формулы для базисных функций Эрмитова кубического элемента для а) одномерного элемента; б) для прямоугольного элемента.

Тема 11. Конечный элемент Белла класса C^1

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить явные формулы для базисных функций элемента Белла.

Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам C_0 и C^1 .

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить принадлежность данного элемента а) классу C_0 б) классу C^1 и обосновать выбор.

Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить регулярность заданного семейства ассоциированных конечных элементов.
Привести доказательство.

Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить регулярность заданного семейства аффинно-эквивалентных конечных элементов.
Привести доказательство.

Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить регулярность заданного семейства криволинейных конечных элементов. Привести доказательство.

Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить регулярность заданного семейства изопараметрических конечных элементов.
Привести доказательство.

Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Привести пример квадратичного пространства треугольных конечных элементов. Привести пример квадратичного пространства прямоугольных конечных элементов.

Тема 18. Аппроксимация подпространств H_k , $k=1,2$.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить, какие из заданных пространств аппроксимируют или нет а) H_1 ; б) H_2 . Обосновать выбор.

Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности погрешности интерполяции на базисном элементе заданного конечного элемента.

контрольная работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности погрешности интерполяции на базисном элементе заданного конечного элемента.

Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности погрешности интерполяции заданного изопараметрического конечного элемента.

Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности схемы МКЭ на основе квадратичных треугольных элементов.

Получить оценку точности схемы МКЭ на основе квадратичных прямоугольных элементов.

Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности схемы МКЭ на основе квадратичных треугольных

изопараметрических элементов. Получить оценку точности схемы МКЭ на основе квадратичных прямоугольных изопараметрических элементов.

Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить алгебраический порядок точности данной квадратурной формулы.

Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение конформной триангуляции. Указать представление в ЭВМ триангуляций конкретных двумерных областей.

Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Рассмотреть алгоритм сборки системы МКЭ на основе линейных элементов на примере задачи Неймана для уравнения Пуассона в квадратной области в случае ортогональной сетки, когда каждая ячейка сетки делится на два треугольника одинаковым образом.

контрольная работа , примерные вопросы:

Определить алгебраический порядок точности данной квадратурной формулы. Указать представление в ЭВМ триангуляций конкретных двумерных областей.

Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Учет главных краевых условий на алгебраическом уровне. Алгоритм модификации матрицы и правой части МКЭ в случае естественных краевых условий.

Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Написать программу в MatLab для вычисления локальной матрицы жесткости в случае линейного треугольного элемента.

Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Написать программу в MatLab для решения системы алгебраических уравнений а) методом Гаусса; б) методом сопряженных градиентов.

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к экзамену:

По данной дисциплине предусмотрено проведение экзамена. Примерные вопросы для экзамена

1. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта.
2. Лемма Лакса-Мильграма.
3. Эквивалентность уравнения с положительно определенным оператором задаче на минимум квадратичного функционала.
4. Метод Рунге.
5. Метод Галеркина.
6. Метод Галеркина с возмущениями. Лемма Сеа.
7. Лемма Брамбля- Гильберта.
8. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка.
9. Критерии принадлежности конечного элемента к классам C_0 , C_1
10. Прямоугольный лагранжевый элемент степени m .
11. Треугольный лагранжевый элемент степени m .
12. Конечный элемент Белла
13. Аффинно-эквивалентные треугольные элементы. Оценка погрешности интерполяции.
14. Аффинно-эквивалентные прямоугольные элементы. Оценка погрешности интерполяции.
15. Криволинейные треугольные конечные элементы. Оценка погрешности интерполяции.

16. Изопараметрические треугольные элементы. Оценка погрешности интерполяции.
17. МКЭ для уравнений в многоугольных областях на основе аффинных элементов. Оценка точности.
18. МКЭ для уравнений в кусочно-гладких областях на основе изопараметрических элементов. Оценка точности.
19. МКЭ с численным интегрированием.
20. Алгоритм сборки системы МКЭ. Учет главных и естественных краевых условий.

7.1. Основная литература:

1. Даутов Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика" и по направлению "Прикладная математика и информатика" / Р. З. Даутов, М. М. Карчевский. ?Изд. 2-е, испр..?Казань: Казанский университет, 2011. ?237 с.: ил.; 21.?Библиогр.: с. 228-229 (25 назв.).?Предм. указ.: с. 234-237. ?ISBN 978-5-98180-993-4
2. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов: [Учебное пособие]. - Казань: Казанский университет. 2012. - 240 с. (с грифом УМО). http://kpfu.ru/publication?p_id=47325
3. Даутов Р.З. Метод Галеркина с возмущениями для задач на собственные значения. [Учебное пособие]. - Казань, 2010. - 94 с. http://kpfu.ru/publication?p_id=21045

7.2. Дополнительная литература:

1. Стренг, Гилберт. Теория метода конечных элементов. / Г. Стренг, Дж. Фикс; под ред. Г. И. Марчука; пер. с англ. В. И. Агошкова [и др.].?М.: Мир, 1977. ?348 с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 324-335.?Имен. указ.: с. 342-344.?Предм. указ.: с. 345-347.
2. Ильин В. П. Методы и технологии конечных элементов / В.П. Ильин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т вычисл. математики и мат. геофизики. ?Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2007. ?370 с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 357-361 (71 назв.).?Предм. указ.: с. 362-367. ?ISBN 978-5-901548-30-1, 460.
3. Репченков В. И. Физические основы метода конечных элементов: пособие для студентов механико-математического факультета / В. И. Репченков, Ю. Е. Нагорный. ?Минск: БГУ, 2009. ?90, [1] с.: ил.; 20.?Библиогр.: с. 89. ?ISBN 978-985-518-194-2, 100.
4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: перевод с английского / Ф. Сьярле; Под ред. Н. Н. Яненко; Пер. Б. И. Класов. ?Москва: Мир, 1980. ?512с.
9. Деклу Ж. Методы конечных элементов / Ж. Деклу. ?Москва: Мир, 1976. ?95с.

7.3. Интернет-ресурсы:

- Библиотека интернет-ресурсов - <http://engenegr.ru>
Библиотека интернет-ресурсов - <http://en.edu.ru/>
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>
Сайт образовательных ресурсов по математике - <http://www.exponenta.ru/>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Метод конечных элементов" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Занятия по дисциплине проводятся в компьютерном классе или аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010400.62 "Прикладная математика и информатика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Даутов Р.З. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Карчевский М.М. _____

"__" _____ 201__ г.