

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.



\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

**Программа дисциплины**  
**Метод конечных элементов БЗ.ДВ.2**

Направление подготовки: 010400.62 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Даутов Р.З.

**Рецензент(ы):**

Карчевский М.М.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 978316

Казань  
2016

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Даутов Р.З. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики ,  
Rafail.Dautov@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины "Метод конечных элементов " является подготовка квалифицированных специалистов в области применения метода конечных элементов для моделирования полей различной физической природы, описываемых уравнениями математической физики.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " БЗ.ДВ.2 Профессиональный" основной образовательной программы 010400.62 Прикладная математика и информатика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 4 курсе, 7 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 4 курсе в 7 семестре для студентов обучающихся по направлению "Прикладная математика и информатика".

Изучение основывается на результатах изучения дисциплин "Алгебра и геометрия", "Математический анализ", "Дополнительные главы физики".

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции                       | Расшифровка приобретаемой компетенции   |
|--|---|
| ПК-2<br>(профессиональные компетенции) | способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии  |
| ПК-5<br>(профессиональные компетенции) | способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности  |
| ПК-7<br>(профессиональные компетенции) | способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным, социальным и этическим проблемам  |
| ПК-9<br>(профессиональные компетенции) | способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая: разработку алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

теоретические знания о понятиях и задачах, связанных с аппроксимацией функциональных пространств Соболева.

2. должен уметь:

определять слабые решения краевых задач математической физики для эллиптических уравнений второго порядка.

### 3. должен владеть:

навыками самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с численным решением краевых задач математической физики методом конечных элементов.

умение строить схемы МКЭ произвольного порядка точности для основных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка.

### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 7 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля |
|----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---------------------------|
|    |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                           |
| 1. | Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.   | 7       |                    | 0   | 1                       | 0                      | домашнее задание          |
| 2. | Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала. | 7       |                    | 0   | 1                       | 0                      | домашнее задание          |
| 3. | Тема 3. Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание          |

| N   | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля              |
|-----|--|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|--|
|     |  |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |  |
| 4.  | Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля-Гильберта.                            | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 5.  | Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи. | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | контрольная работа<br>домашнее задание |
| 6.  | Тема 6. Интерполяция в $R_n$ . Разрешимость задачи.  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 7.  | Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $S_k$                                    | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 8.  | Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени $m$ .                      | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 9.  | Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 10. | Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 11. | Тема 11. Конечный элемент Белла класса $S_1$   | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 12. | Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам $S_0$ и $S_1$ .                                       | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |

| N   | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля              |
|-----|--|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|--|
|     |  |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |  |
| 13. | Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 14. | Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.   | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 15. | Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.   | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 16. | Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 17. | Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.   | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 18. | Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 19. | Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.                                 | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | контрольная работа<br>домашнее задание |
| 20. | Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.   | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 21. | Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности. | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |

| N   | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля              |
|-----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|--|
|     |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |  |
| 22. | Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.                             | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 23. | Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности. | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 24. | Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.   | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 25. | Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.            | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | контрольная работа<br>домашнее задание |
| 26. | Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.   | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 27. | Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.                                  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
| 28. | Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.  | 7       |                    | 0   | 2                       | 0                      | домашнее задание                       |
|     | Тема . Итоговая форма контроля  | 7       |                    | 0   | 0                       | 0                      | экзамен                                |
|     | Итого   |         |                    | 0   | 54                      | 0                      |  |

## 4.2 Содержание дисциплины

## **Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.**

### ***практическое занятие (1 часа(ов)):***

Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка. Формирование системы МКЭ, оценка точности метода

## **Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.**

### ***практическое занятие (1 часа(ов)):***

Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала. Примеры задач, исследование свойств операторов, применение леммы Лакса-Мильграма для исследования разрешимости этих задач.

## **Тема 3. Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.**

### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями. Структура системы алгебраических уравнений. Базисы с локальным носителем, разреженные системы алгебраических уравнений.

## **Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля- Гильберта.**

### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки этих пространств. Примеры эквивалентных норм в пространствах Соболева первого и второго порядков. Доказательство леммы Брамбля- Гильберта. Неравенства Фридрихса, Пуанкаре.

## **Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.**

### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Исследование свойства форм, определяющих обобщенное решение. Существование обобщенного решения. Корректность обобщенной задачи.

## **Тема 6. Интерполяция в $R^n$ . Разрешимость задачи.**

### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Задача интерполяции в одномерном и многомерном случаях. Разрешимость задачи интерполяции. Примеры задач интерполяции на базисном треугольнике и квадрате.

## **Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $S_k$**

### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Определение конечного элемента как тройки. Примеры конечных элементов. Критерии принадлежности конечного элемента к классу  $S_k$ . Примеры конечных элементов классов  $S_0$  и  $S_1$ .

## **Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени $m$ .**

### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени  $m$ .

## **Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы**

### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Неполные прямоугольные лагранжевые элементы. Неполный квадратичный элемент. Алгоритм определения произвольного неполного элемента. Симметричные неполные элементы.

## **Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)**



**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Определение Эрмитова кубического конечного элемента. Примеры одномерных элементов. Примеры двумерного прямоугольного Эрмитова элемента. Треугольные эрмитовы элементы.

**Тема 11. Конечный элемент Белла класса С1**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Определение конечного элемента Белла класса С1. Доказательство униразрешимости. Определение степеней свободы конечного элемента.

**Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам С0 и С1.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Ассоциированные конечные элементы. Критерии принадлежности ассоциированных конечных элементов к классам С0 и С1. Примеры ассоциированных элементов в одномерном и двумерном случаях.

**Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Определение регулярности семейства ассоциированных конечных элементов. Регулярность семейства треугольных конечных элементов. Регулярность семейства прямоугольных конечных элементов.

**Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность. Регулярность триангуляции. Критерии регулярности семейства аффинно-эквивалентных элементов.

**Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Криволинейные элементы. Регулярность. Критерии регулярности семейства криволинейных элементов.

**Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Изопараметрические элементы. Регулярность. Критерии регулярности семейства изопараметрических элементов.

**Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.

**Тема 18. Аппроксимация подпространств  $H_k$ ,  $k=1,2$ .**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Аппроксимация подпространств  $H_k$ ,  $k=1,2$  на основе Лагранжевых и Эрмитовых конечных элементов. Учет краевых условий.

**Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Замена переменных в нормах пространства Соболева. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов. Рассмотрение конкретных примеров.

**Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов. Рассмотрение конкретных примеров.

**Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.**

***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Метод конечных элементов для уравнений в многоугольных областях на основе аффинных элементов. МКЭ для уравнений в областях с кусочно-гладкой границей на основе криволинейных конечных элементов. Оценки точности решения соответствующих схем МКЭ.

**Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.**

***практическое занятие (2 часа(ов)):***

МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей на основе изопараметрических конечных элементов. Примеры схем. Оценки точности решения соответствующих схем МКЭ.

**Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.**

***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Квадратурные формулы для вычисления интегралов по треугольной и четырехугольной области. Определение схем МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость схем, получение оценок точности.

**Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.**

***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ. Матрица связности элементов. Способы хранения разреженных матриц.

**Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.**

***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Алгоритм сборки системы МКЭ в случае однородной задачи Неймана. Вычисление матрицы жесткости на примере оператора Лапласа и линейных треугольных элементов. Бариецентрические координаты. Вычисление градиента базисных функций.

**Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.**

***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Учет главных и естественных краевых условий в алгоритме сборки системы МКЭ. Алгоритмы и программная реализация на примере линейных элементов.

**Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.**

***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Локальная матрица жесткости. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа. Рассмотрение конкретных примеров.

**Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.**

***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Обзор методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Прямые и итерационные методы для решения разреженных систем алгебраических уравнений. Методы Гаусса и сопряженных градиентов.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

| N  | Раздел Дисциплины   | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|----|---|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 1. | Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.   | 7       |                 | Домашняя работа                       | 1                      | Домашняя работа                       |
| 2. | Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала. | 7       |                 | Домашняя работа                       | 1                      | Домашняя работа                       |
| 3. | Тема 3. Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.  | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 4. | Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля-Гильберта.   | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 5. | Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.  | 7       |                 | Домашняя работа                       | 1                      | Домашняя работа                       |
|    |   |         |                 | подготовка к контрольной работе       | 1                      | контрольная работа                    |
| 6. | Тема 6. Интерполяция в $R^n$ . Разрешимость задачи.   | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 7. | Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $S_k$   | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |

| N   | Раздел<br>Дисциплины  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды<br>самостоятельной<br>работы<br>студентов | Трудоёмкость<br>(в часах) | Формы контроля<br>самостоятельной<br>работы |
|-----|---|---------|--------------------|--|---------------------------|---|
| 8.  | Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени $m$ . | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 9.  | Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы   | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 10. | Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)                       | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 11. | Тема 11. Конечный элемент Белла класса $C1$   | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 12. | Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам $C0$ и $C1$ .                    | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 13. | Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.   | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 14. | Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.  | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 15. | Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.  | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 16. | Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.   | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 17. | Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.                | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |
| 18. | Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .   | 7       |                    | Домашняя работа                                | 2                         | Домашняя работа                             |

| N   | Раздел Дисциплины  | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|--|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 19. | Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.                                 | 7       |                 | Домашняя работа                       | 1                      | Домашняя работа                       |
|     |  |         |                 | подготовка к контрольной работе       | 1                      | контрольная работа                    |
| 20. | Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.   | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 21. | Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности. | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 22. | Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.                                    | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 23. | Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.        | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 24. | Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.  | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 25. | Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.                   | 7       |                 | Домашняя работа                       | 1                      | Домашняя работа                       |
|     |  |         |                 | подготовка к контрольной работе       | 1                      | контрольная работа                    |

| N   | Раздел Дисциплины  | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|--|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 26. | Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.  | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 27. | Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа. | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
| 28. | Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.                 | 7       |                 | Домашняя работа                       | 2                      | Домашняя работа                       |
|     | Итого  |         |                 |                                       | 54                     |                                       |

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме практических занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на занятиях. Причем конспект лекций, который остается у студента не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Формы записи линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Виды и формы записи краевых условий. Простейшая схема МКЭ для первой краевой задачи для ОДУ второго порядка.

### Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение пространства Гильберта. Определение линейных и билинейных форм и их непрерывности. Формулировка леммы Лакса-Мильграма.

### **Тема 3. Метод Ритца. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение метода Ритца. Определение метода Галеркина. Примеры конечномерных пространств и выбор базисных функций в них.

### **Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбла- Гильберта.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение пространств Соболева. Пространство  $H^1$ . Примеры эквивалентных норм в  $H^1$ . Формулировка леммы Брамбла- Гильберта.

### **Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Определение обобщенного решения задачи Неймана для уравнения Пуассона.

контрольная работа , примерные вопросы:

Доказать ограниченность заданной линейной и билинейной формы. Доказать коэрцитивность заданной билинейной формы. Доказать обобщенную разрешимость заданной краевой задачи.

### **Тема 6. Интерполяция в $R^n$ . Разрешимость задачи.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Интерполяционный полином Лагранжа. Линейная интерполяция функций на треугольнике. Билинейная интерполяция функций на прямоугольнике. Квадратичная интерполяция функций на треугольнике. Биквадратичная интерполяция функций на прямоугольнике.

### **Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $S_k$**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Указать конечные элементы из заданного набора и обосновать выбор.

### **Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени $m$ .**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить явные формулы для базисных функций а) линейного б) квадратичного треугольного элемента. Получить явные формулы для базисных функций а) билинейного б) биквадратичного прямоугольного элемента.

### **Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить явные формулы для базисных функций квадратичного неполного прямоугольного элемента.

### **Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить явные формулы для базисных функций Эрмитова кубического элемента для а) одномерного элемента; б) для прямоугольного элемента.

### **Тема 11. Конечный элемент Белла класса $C^1$**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить явные формулы для базисных функций элемента Белла.

### **Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам $C_0$ и $C^1$ .**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить принадлежность данного элемента а) классу  $C_0$  б) классу  $C^1$  и обосновать выбор.

### **Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить регулярность заданного семейства ассоциированных конечных элементов.  
Привести доказательство.

#### **Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить регулярность заданного семейства аффинно-эквивалентных конечных элементов.  
Привести доказательство.

#### **Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить регулярность заданного семейства криволинейных конечных элементов. Привести доказательство.

#### **Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить регулярность заданного семейства изопараметрических конечных элементов.  
Привести доказательство.

#### **Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Привести пример квадратичного пространства треугольных конечных элементов. Привести пример квадратичного пространства прямоугольных конечных элементов.

#### **Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить, какие из заданных пространств аппроксимируют или нет а)  $H_1$ ; б)  $H_2$ . Обосновать выбор.

#### **Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности погрешности интерполяции на базисном элементе заданного конечного элемента.

контрольная работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности погрешности интерполяции на базисном элементе заданного конечного элемента.

#### **Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности погрешности интерполяции заданного изопараметрического конечного элемента.

#### **Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности схемы МКЭ на основе квадратичных треугольных элементов.

Получить оценку точности схемы МКЭ на основе квадратичных прямоугольных элементов.

#### **Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Получить оценку точности схемы МКЭ на основе квадратичных треугольных изопараметрических элементов. Получить оценку точности схемы МКЭ на основе квадратичных прямоугольных изопараметрических элементов.

#### **Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определить алгебраический порядок точности данной квадратурной формулы.



## **Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Определение конформной триангуляции. Указать представление в ЭВМ триангуляций конкретных двумерных областей.

## **Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Рассмотреть алгоритм сборки системы МКЭ на основе линейных элементов на примере задачи Неймана для уравнения Пуассона в квадратной области в случае ортогональной сетки, когда каждая ячейка сетки делится на два треугольника одинаковым образом.

контрольная работа , примерные вопросы:

Определить алгебраический порядок точности данной квадратурной формулы. Указать представление в ЭВМ триангуляций конкретных двумерных областей.

## **Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Учет главных краевых условий на алгебраическом уровне. Алгоритм модификации матрицы и правой части МКЭ в случае естественных краевых условий.

## **Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Написать программу в MatLab для вычисления локальной матрицы жесткости в случае линейного треугольного элемента.

## **Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.**

Домашняя работа , примерные вопросы:

Написать программу в MatLab для решения системы алгебраических уравнений а) методом Гаусса; б) методом сопряженных градиентов.

## **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

По данной дисциплине предусмотрено проведение экзамена. Примерные вопросы для экзамена

1. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта.
2. Лемма Лакса-Мильграма.
3. Эквивалентность уравнения с положительно определенным оператором задаче на минимум квадратичного функционала.
4. Метод Рунге.
5. Метод Галеркина.
6. Метод Галеркина с возмущениями. Лемма Сеа.
7. Лемма Брамбля- Гильберта.
8. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка.
9. Критерии принадлежности конечного элемента к классам  $C_0$ ,  $C_1$
10. Прямоугольный лагранжевый элемент степени  $m$ .
11. Треугольный лагранжевый элемент степени  $m$ .
12. Конечный элемент Белла
13. Афинно-эквивалентные треугольные элементы. Оценка погрешности интерполяции.
14. Афинно-эквивалентные прямоугольные элементы. Оценка погрешности интерполяции.
15. Криволинейные треугольные конечные элементы. Оценка погрешности интерполяции.

16. Изопараметрические треугольные элементы. Оценка погрешности интерполяции.
17. МКЭ для уравнений в многоугольных областях на основе аффинных элементов. Оценка точности.
18. МКЭ для уравнений в кусочно-гладких областях на основе изопараметрических элементов. Оценка точности.
19. МКЭ с численным интегрированием.
20. Алгоритм сборки системы МКЭ. Учет главных и естественных краевых условий.

### 7.1. Основная литература:

1. Даутов Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика" и по направлению "Прикладная математика и информатика" / Р. З. Даутов, М. М. Карчевский. ?Изд. 2-е, испр..?Казань: Казанский университет, 2011. ?237 с.: ил.; 21.?Библиогр.: с. 228-229 (25 назв.).?Предм. указ.: с. 234-237. ?ISBN 978-5-98180-993-4
2. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов: [Учебное пособие]. - Казань: Казанский университет. 2012. - 240 с. (с грифом УМО). [http://kpfu.ru/publication?p\\_id=47325](http://kpfu.ru/publication?p_id=47325)
3. Даутов Р.З. Метод Галеркина с возмущениями для задач на собственные значения. [Учебное пособие]. - Казань, 2010. - 94 с. [http://kpfu.ru/publication?p\\_id=21045](http://kpfu.ru/publication?p_id=21045)

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Стренг, Гилберт. Теория метода конечных элементов. / Г. Стренг, Дж. Фикс; под ред. Г. И. Марчука; пер. с англ. В. И. Агошкова [и др.].?М.: Мир, 1977. ?348 с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 324-335.?Имен. указ.: с. 342-344.?Предм. указ.: с. 345-347.
2. Ильин В. П. Методы и технологии конечных элементов / В.П. Ильин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т вычисл. математики и мат. геофизики.?Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2007. ?370 с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 357-361 (71 назв.).?Предм. указ.: с. 362-367. ?ISBN 978-5-901548-30-1, 460.
3. Репченков В. И. Физические основы метода конечных элементов: пособие для студентов механико-математического факультета / В. И. Репченков, Ю. Е. Нагорный.?Минск: БГУ, 2009. ?90, [1] с.: ил.; 20.?Библиогр.: с. 89. ?ISBN 978-985-518-194-2, 100.
4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: перевод с английского / Ф. Сьярле; Под ред. Н. Н. Яненко; Пер. Б. И. Класов.?Москва: Мир, 1980. ?512с.
9. Деклу Ж. Методы конечных элементов / Ж. Деклу.?Москва: Мир, 1976. ?95с.

### 7.3. Интернет-ресурсы:

- Библиотека интернет-ресурсов - <http://engenegr.ru>  
Библиотека интернет-ресурсов - <http://en.edu.ru/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>  
Сайт образовательных ресурсов по математике - <http://www.exponenta.ru/>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Метод конечных элементов" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Занятия по дисциплине проводятся в компьютерном классе или аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010400.62 "Прикладная математика и информатика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Даутов Р.З. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Карчевский М.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.