

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Матричный и тензорный анализ М1.В.1

Направление подготовки: 231300.68 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Задворнов О.А.

**Рецензент(ы):**

Панкратова О.В.

### **СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_ от "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_ от "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 993314

Казань

2014

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Задворнов О.А. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики, Oleg.Zadvornov@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Излагаются основные понятия матричного и тензорного анализа. Курс содержит необходимые сведения из алгебры и анализа.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " М1.В.1 Общенаучный" основной образовательной программы 231300.68 Прикладная математика и относится к вариативной части. Осваивается на 1 курсе, 1 семестр.

Данная дисциплина относится к общенаучному циклу.

Читается на 1 курсе в 1 семестре для магистров обучающихся по направлению "Прикладная математика".

Изучение основывается на результатах изучения дисциплин "Алгебра и геометрия", "Математический анализ", "Уравнения математической физики".

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-1 (общекультурные компетенции)	способностью совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень
ОК-2 (общекультурные компетенции)	способностью к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности
ОК-3 (общекультурные компетенции)	готовностью к активному общению в научной, производственной и социально-общественной сферах деятельности; способностью свободно пользоваться русским и иностранным языками как средством делового общения; способностью участвовать в работе семинаров и конференций на иностранном языке
ОК-4 (общекультурные компетенции)	способностью использовать на практике навыки и умения в организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, оценивать качество результатов деятельности
ОК-5 (общекультурные компетенции)	способностью демонстрировать знания фундаментальных и прикладных дисциплин ОПП магистратуры
ПК-1 (профессиональные компетенции)	способностью проводить экономический анализ работ, обосновывать оптимальность решения с учетом различных требований
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способностью разрабатывать эффективные математические методы решения задач естествознания, техники, экономики и управления

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способностью разрабатывать научно-техническую документацию, оформлять научно-технические отчеты, обзоры, публикации по результатам выполненных исследований

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

Магистры, завершившие изучение данной дисциплины должны быть знакомыми с разделами теории уравнений математической физики, функционального анализа и численных методов

2. должен уметь:

использовать матричный и тензорный анализ для решения определенных задач.

3. должен владеть:

основными понятиями из курсов "Алгебра и геометрия", "Математический анализ", "Уравнения математической физики".

4. должен демонстрировать способность и готовность:

применять полученные знания по дисциплине "Матричный и тензорный анализ" в математическом моделировании.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 1 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Функции от						

матриц

1	1-2	0	2	2	домашнее задание
---	-----	---	---	---	------------------

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
2.	Тема 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа- Сильвестра	1	3	0	0	2	домашнее задание
3.	Тема 3. Простые матрицы	1	4	0	2	0	домашнее задание
4.	Тема 4. Определенные матрицы	1	5	0	2	0	домашнее задание
5.	Тема 5. Теорема Фробениуса-Перона	1	6	0	2	0	контрольная работа
6.	Тема 6. Элементы тензорной алгебры	1	7-9	0	2	3	домашнее задание
7.	Тема 7. Скалярные, векторные и тензорные поля в аффинном пространстве.	1	9-11	0	2	3	домашнее задание
8.	Тема 8. Внешнее дифференцирование и дифференциальные операторы векторного анализа.	1	12-14	0	2	3	домашнее задание
9.	Тема 9. Интегрирование дифференциальных форм. Интегральные теоремы векторного анализа.	1	14-16	0	2	3	контрольная работа
	Тема . Итоговая форма контроля	1		0	0	0	зачет
	Итого			0	16	16	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Функции от матриц

*практическое занятие (2 часа(ов)):*

Определение функции.

*лабораторная работа (2 часа(ов)):*

Свойства функций от матриц.

### Тема 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа- Сильвестра

*лабораторная работа (2 часа(ов)):*

Рассматривается общий случай и случаи, когда: характеристический многочлен имеет ровно  $n$  корней, среди которых нет кратных. Характеристический многочлен матрицы имеет кратные корни, но минимальный многочлен этой матрицы является делителем характеристического многочлена и имеет только простые корни.

### **Тема 3. Простые матрицы**

#### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Определение и свойства простой матрицы. Спектральная теорема. Спектральное разложение функции.

### **Тема 4. Определенные матрицы**

#### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Эрмитовы и квадратичные матрицы. Неотрицательные матрицы.

### **Тема 5. Теорема Фробениуса-Перона**

#### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Лемма для неотрицательной и неприводимой матрицы. Теорема Фробениуса ? Перона. Следствие теоремы Фробениуса ? Перона.

### **Тема 6. Элементы тензорной алгебры**

#### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Векторы и 1-формы, сопряженное пространство, взаимные базисы, трансформационные свойства векторов и 1-форм. Общее понятие тензора. Тензорные базисы.

Трансформационные свойства тензоров. Операции тензорной алгебры (сумма, умножение на число, тензор-ное произведение, свертка). Операции тензорной алгебры в координатах.

#### ***лабораторная работа (3 часа(ов)):***

Метрический тензор. Подъем и спуск индексов. Кососимметрические формы, внешнее произведение. Форма объема и ориентация векторного пространства, метрическая форма объема, дуальные формы объема, оператор Ходжа и векторное произведение. Тензор инерции абсолютно твердого тела.

### **Тема 7. Скалярные, векторные и тензорные поля в аффинном пространстве.**

#### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Производная по направлению и дифференциал: основные свойства. Регулярные криволинейные координаты в аффинном пространстве, локальный репер регулярной системы координат, координатные кривые. Ориентация системы координат. Скалярные (функции) и векторные поля. Тензорные поля. Дифференциальные формы.

#### ***лабораторная работа (3 часа(ов)):***

Метрический тензор и форма объема в криволинейных координатах. Градиент скалярного поля, его разложение по локальному базису криволинейных координат. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах (разложение по векторам локального базиса, проекции на векторы локального базиса). Уравнение Ньютона в криволинейных координатах.

### **Тема 8. Внешнее дифференцирование и дифференциальные операторы векторного анализа.**

#### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Внешняя производная дифференциальной формы, свойства внешней производной, разложение внешней производной дифференциальной формы по базисным дифференциальным формам. Дифференциальные операторы векторного анализа (дивергенция, лапласиан, ротор) на языке внешнего дифференцирования. Основные тождества векторного анализа как следствия свойств внешнего дифференциала. Замкнутые и точные дифференциальные формы.

#### ***лабораторная работа (3 часа(ов)):***

Лемма Пуанкаре и её приложения к векторному анализу: скалярный и векторный потенциал векторного поля. Антиувлечение дифференциальных форм гладким отображением. Уравнения электродинамики на языке дифференциальных форм.

### **Тема 9. Интегрирование дифференциальных форм. Интегральные теоремы векторного анализа.**

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Интеграл от дифференциальной формы по измеримой области ориентированного аффинного пространства. Теорема о замене переменных под знаком кратного интеграла на языке дифференциальных форм. Ориентированные сингулярные кубы и цепи. Теорема Гаусса о дивергенции.

**лабораторная работа (3 часа(ов)):**

Интеграл от дифференциальной формы по цепи. Криволинейные и поверхностные интегралы как интегралы от дифференциальных форм. Граница цепи. Общая интегральная формула Стокса. Формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса. Физическая интерпретация дивергенции и ротора.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Функции от матриц	1	1-2	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
2.	Тема 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра	1	3	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
3.	Тема 3. Простые матрицы	1	4	подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
4.	Тема 4. Определенные матрицы	1	5	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
5.	Тема 5. Теорема Фробениуса-Перона	1	6	подготовка к контрольной работе	6	контрольная работа
6.	Тема 6. Элементы тензорной алгебры	1	7-9	подготовка домашнего задания	10	домашнее задание
7.	Тема 7. Скалярные, векторные и тензорные поля в аффинном пространстве.	1	9-11	подготовка домашнего задания	10	домашнее задание
8.	Тема 8. Внешнее дифференцирование и дифференциальные операторы векторного анализа.	1	12-14	подготовка домашнего задания	10	домашнее задание
9.	Тема 9. Интегрирование дифференциальных форм. Интегральные теоремы векторного анализа.	1	14-16	подготовка к контрольной работе	10	контрольная работа
	Итого				76	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме практических и лабораторных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на практиках. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике.

На лабораторных занятиях доказывается и дополняется теоретический материал. Приводятся примеры применения теории на практике.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к зачету. При подготовке к сдаче зачета весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки, контролировать каждый день выполнения работы.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Функции от матриц

домашнее задание , примерные вопросы:

Определение спектра матрицы. Интерполяционным многочленом Лагранжа ? Сильвестра для функции  $f(x)$  на спектре матрицы  $A$ . значение функции на спектре, если минимальный многочлен  $m(x)$  матрицы  $A$  не имеет кратных корней. Доказать свойства функций от матриц.

### Тема 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа- Сильвестра

домашнее задание , примерные вопросы:

Рассмотреть случай, когда характеристический многочлен имеет ровно  $n$  корней, среди которых нет кратных. Рассмотреть случай, когда характеристический многочлен матрицы имеет кратные корни, но минимальный многочлен этой матрицы является делителем характеристического многочлена и имеет только простые корни. Пусть  $f(x)$  определена на спектре матрицы, минимальный многочлен которой имеет вид  $m(x)$ . Найти интерполяционный многочлен  $r(x)$  для функции  $f(x)$ .

### Тема 3. Простые матрицы

домашнее задание , примерные вопросы:

Доказать следующий результат Алгебраическая кратность собственного значения не меньше его геометрической кратности.

### Тема 4. Определенные матрицы

домашнее задание , примерные вопросы:

Доказать следующий результат Действительная симметрическая матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.

### Тема 5. Теорема Фробениуса-Перона

контрольная работа , примерные вопросы:

Найти компоненты для матрицы и минимальный многочлен матрицы. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра для матрицы. Задания по вариантам, примеры в приложении 1.

### Тема 6. Элементы тензорной алгебры

домашнее задание , примерные вопросы:

Элементы тензорной алгебры Сопряженное пространство. Тензоры на линейном пространстве. Операции над тензорами. Тензоры на линейном пространстве со скалярным произведением. Внешние формы. Внешнее умножение. Ориентация. Форма объёма. Оператор Ходжа. Тензор инерции абсолютно твёрдого тела.

### **Тема 7. Скалярные, векторные и тензорные поля в аффинном пространстве.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Скалярные, векторные и тензорные поля в аффинном пространстве. Экскурс в анализ. Регулярные системы координат Векторные и тензорные поля Уравнение динамики точки в криволинейных координатах.

### **Тема 8. Внешнее дифференцирование и дифференциальные операторы векторного анализа.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Внешнее дифференцирование и дифференциальные операторы векторного анализа. Определение и свойства внешнего дифференциала. Операторы векторного анализа на языке внешнего дифференцирования. Лемма Пуанкаре и её приложения к векторному анализу. Антиувлечение дифференциальных форм гладким отображением. Уравнения электродинамики на языке дифференциальных форм.

### **Тема 9. Интегрирование дифференциальных форм. Интегральные теоремы векторного анализа.**

контрольная работа , примерные вопросы:

Ответить на вопросы Интегрирование дифференциальных форм. Интегральные теоремы векторного анализа. Интеграл от дифференциальной формы. Общая интегральная формула Стокса. Некоторые частные случаи общей формулы Стокса. Теорема Гаусса о дивергенции. Формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса. Физическая интерпретация  $\text{div}$  и  $\text{rot}$ .

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету:

Для текущего контроля успеваемости предусмотрено проведение контрольных работ.

Примерные темы контрольных работ: Интегрирование дифференциальных форм.

Интегральные теоремы векторного анализа.

Интеграл от дифференциальной формы.

Общая интегральная формула Стокса.

Некоторые частные случаи общей формулы Стокса.

Теорема Гаусса о дивергенции. Формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса.

Физическая интерпретация  $\text{div}$  и  $\text{rot}$ .

Примерные вопросы на зачет:

Определение спектра матрицы.

характеристический многочлен матрицы.

минимальный многочлен матрицы.

спектр матрицы.

Интерполяционным многочленом Лагранжа - Сильвестра.

Теорема Фробениуса-Перона

Элементы тензорной алгебры

Сопряженное пространство.

Тензоры на линейном пространстве. Операции над тензорами.

Тензоры на линейном пространстве со скалярным произведением.

Внешние формы. Внешнее умножение.

Ориентация. Форма объёма. Оператор Ходжа.

Тензор инерции абсолютно твёрдого тела.

Скалярные, векторные и тензорные поля в аффинном пространстве.

Экскурс в анализ.

Регулярные системы координат

Векторные и тензорные поля

Уравнение динамики точки в криволинейных координатах.

Внешнее дифференцирование и дифференциальные операторы векторного анализа.

Определение и свойства внешнего дифференциала.

Операторы векторного анализа на языке внешнего дифференцирования.

Лемма Пуанкаре и её приложения к векторному анализу.

Антиувлечение дифференциальных форм гладким отображением.

Уравнения электродинамики на языке дифференциальных форм.

Интегрирование дифференциальных форм. Интегральные теоремы векторного анализа.

Интеграл от дифференциальной формы.

Общая интегральная формула Стокса.

Некоторые частные случаи общей формулы Стокса.

Теорема Гаусса о дивергенции. Формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса.

Физическая интерпретация  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$ .

### 7.1. Основная литература:

1. Карчевский, Евгений Михайлович. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / Е. М. Карчевский, М. М. Карчевский. - Казань: Казанский университет, 2011. - 269 с. : ил. ; 21 см. - Библиогр.: с. 268-269 (15 назв.). - ISBN 978-5-98180-994-1 ((в пер.)), 200.269 с.
2. Беляев Ю. Н. Векторный и тензорный анализ : учебное пособие / Ю. Н. Беляев ; М-во образования и науки Рос. Федерации, ГОУ ВПО "Сыктывкар. гос. ун-т". - Сыктывкар : [Изд-во СыктГУ], 2010. - 297 с. : ил. ; 25 см. - Библиогр.: с. 12-14 (28 назв.) и в подстроч. примеч. - Имен. и предм. указ.: с. 291-297. ISBN 978-5-87237-711-5, 500 см. - фрагмент книги.
3. Келлер И.Э. Тензорное исчисление: Учебное пособие. - СПб.: Лань, 2012. - 176 с. ISBN 978-5-8114-1352-2 <http://e.lanbook.com/view/book/3814/page4/>
4. Певзнер Л.Д. Теория систем управления: Учебное пособие. - 2-е изд., испр. И доп. - СПб: Издательство "Лань", 2013. - 424с. ISBN 978-5-8114-1566-3 <http://e.lanbook.com/view/book/38847/page3885>. 72 1 ЭБС ЭБС
5. П.С.Александров, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб.:Лань, 2009. - 512 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=493](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=493)

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Векторный и тензорный анализ: учебное пособие / Беляев Ю. Н.- Сыктывкар [Изд-во СыктГУ] 2010.- 297с. -ISBN: 978-5-87237-711-5
2. Введение в тензорный анализ и риманову геометрию : учебное пособие для вузов / А. А. Абрамов. - Издание 2-е. - Москва : Физматлит, 2004. - 112 с. ; 22 см. - Библиогр. в подстроч. примеч. - ISBN 5-94052-062-8, 3000.
3. Матричный анализ : курс лекций / Б. Б. Комраков. - Минск : БГУ, 2006. - 99, [3] с. ; 20 см. - Библиогр.: с. 101 (15 назв.). - ISBN 985-485-554-6, 150.

### 7.3. Интернет-ресурсы:

Учебное пособие - [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2206](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206)

Учебное пособие - [http://libweb.ksu.ru/ebooks/05\\_039\\_000398.pdf](http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_039_000398.pdf)

Учебное пособие - <http://e.lanbook.com/view/book/3814/page4/>

Учебное пособие - [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=493](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=493)

Учебное пособие - <http://e.lanbook.com/view/book/38847/page3885>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Матричный и тензорный анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Практические и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 231300.68 "Прикладная математика" и магистерской программе Математическое моделирование .

Автор(ы):

Задворнов О.А. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Панкратова О.В. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.