МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ (ДО КФУ)

_____________________________________ "____" ________________20___ г.

подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины

Приложения теории вейвлетов в компьютерной графике М1.ДВ.2

Направление подготовки: 010200.68 - Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки: Методы математического и алгоритмического моделирования общенаучных и прикладных задач

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Липачев Е.К.

Рецензент(ы):

Агачев Ю.Р.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Авхадиев Ф. Г.
Протокол заседания кафедры No ___ от "____" ____________ 201__г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :
Протокол заседания УМК No ____ от "____" ____________ 201__г

Регистрационный No 81728214

Казань
2017

Содержание

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Липачев Е.К. Кафедра теории функций и приближений отделение математики , Evgeny.Lipachev@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) "Приложения теории вейвлетов в компьютерной графике" являются освоение студентами методов обработки цифровой информации на основе аппарата вейвлетов.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " М1.ДВ.2 Общенаучный" основной образовательной программы 010200.68 Математика и компьютерные науки и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 1 курсе, 2 семестр.

Дисциплина "Приложения теории вейвлетов в компьютерной графике" входит в цикл профессиональных дисциплин по выбору.

Для прохождения курса необходимы знания математического анализа, функционального анализа, дифференциальных уравнений в объеме университетских курсов, навыки программирования и умение работы с научными пакетами.

Освоение дисциплины "Приложения теории вейвлетов в компьютерной графике" позволит обучающимся овладеть современными методами обработки цифровой информации, познакомиться с алгоритмами вейвлет-анализа изображений и провести компьютерную обработку изображений, получить дополнительные знания для проведения самостоятельных исследований при выполнении курсовых и дипломных работ.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-5 (общекультурные компетенции)	ОК-5 способность порождать новые идеи
ОК-6 (общекультурные компетенции)	ОК-6 способность работать самостоятельно
ПК-1 (профессиональные компетенции)	ПК-1 владение методами математического моделирования при анализе проблем на основе знаний фундаментальных дисциплин
ПК-2 (профессиональные компетенции)	умением понять поставленную задачу (ПК-2)
ПК-7 (профессиональные компетенции)	умение ориентироваться в современных алгоритмах
ПК-8 (профессиональные компетенции)	собственное видение прикладного аспекта
ПК-9 (профессиональные компетенции)	способность к творческому применению

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные идеи, лежащие в основе теории вейвлетов, алгоритмы обработки изображений

2. должен уметь:

выводить и доказывать основные соотношения вейвлет-анализа

3. должен владеть:

приемами компьютерной обработки изображений с помощью вейвлет-анализа

4. должен демонстрировать способность и готовность:

Применять полученные знания в практических задачах

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет во 2 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Примеры вейвлетов. Функция и вейвлет Хаара. Пространство L2 и масштабирующая последовательность подпространств. Ортогональный кратномасштабный анализ. Базис Рисса. Определение вейвлетов.	2		2	2	0	Устный опрос
2.	Тема 2. Преобразование Фурье и оконное преобразование Фурье	2		2	2	0	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
3.	Тема 3. Масштабирующая функция. Преобразование Фурье масштабирующего уравнения. Функция отклика и ее свойства.	2		2	4	0	Письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Построение всплесков Добеши с помощью каскадного алгоритма.	2		2	4	0	Письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Многомерный кратномасштабный анализ. Многомерные базисы всплесков. Сепарабельные и несепарабельные базисы.	2		1	2	0	Письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Всплески Хаара для двумерного случая.	2		1	2	0	Письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Связь теории всплесков с методами компьютерной графики. Алгоритмы сжатия информации, основанные на всплесках Хаара	2		1	2	0	Письменное домашнее задание
8.	Тема 8. Поиск информации по шаблону. Метрики формирования запроса изображения	2		1	2	0	Письменное домашнее задание
9.	Тема 9. Функция анализа всплесков в MatLab. Пакет Wavelet Toolbox	2		2	4	0	Письменное домашнее задание
10.	Тема 10. Обработка сигналов в MatLab	2		2	4	0	Письменное домашнее задание
11.	Тема 11. Обработка изображений в MatLab	2		0	2	0	Дискуссия Деловая игра
.	Тема . Итоговая форма контроля	2		0	0	0	Зачет
	Итого			16	30	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Примеры вейвлетов. Функция и вейвлет Хаара. Пространство L2 и масштабирующая последовательность подпространств. Ортогональный кратномасштабный анализ. Базис Рисса. Определение вейвлетов.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Будут рассмотрены вопросы Что такое вейвлет. Сколько всего вейвлетов. Кратномасштабный анализ. Применения вейвлетов. Функция и вейвлет Хаара \begin{block}{Функция Хаара} $$ \varphi (x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1,&0 \leqslant x<1 \\ 0,&x\not\in [0,1) \end{array} \right. $$ \end{block} График \begin{block}{Вейвлет Хаара} $$ \psi (x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1,&0\leqslant x<\frac{1}{2} \\ -1,&\frac{1}{2}\leqslant x <1\\ 0,&x\not\in[0,1) \end{array} \right. $$ \end{block} Кратномасштабным разложением пространства $L_2 (\mathbb{R})$ называется последовательность замкнутых вложенных попространств $ \cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots , $ обладающая свойствами: } 1) $\overline{\cup_{j=0}^\infty V_j} =L_2 (\mathbb{R})$; 2) $\cap_{j=-\infty}^\infty V_j=\{0\}$; 3) $f(x) \in V_j$ \textit{тогда и только тогда, когда } $f(2x) \in V_{j+1}$; 4) \textit{существует функция $\varphi (x) \in V_0$, которую называют масштабирующей, такая что} $ \varphi_{0,n} (x) = \varphi(x-n), \quad n\in \mathbb{Z} $ \textit{(т.е. сдвиги функции φ) образуют базис Рисса пространства V_0.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Доказательство основных соотношений, в частности, - ортогональность базиса из вейвлетов Хаара

Тема 2. Преобразование Фурье и оконное преобразование Фурье

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Преобразование Фурье функции f: $$ \left(\mathcal{F} f\right) (\omega) \equiv F\left[f\right] \equiv \hat f (\omega) \; {\buildrel\rm def\over=}\; \int\limits_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ix\omega} \, dx, \quad \omega \in \mathbb{R}. $$ \end{block} \pause \begin{block}{} Обратное преобразование Фурье $$ F^{-1} \left[f\right] (x) \; {\buildrel\rm def\over=}\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f (\omega) e^{i x \omega} \, d\omega=\frac{1}{2\pi}F\left[f\right] (-x), $$ \end{block} где интеграл понимается как несобственный в смысле главного значения ($v.p. \displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \; {\buildrel\rm def\over=}\; \displaystyle\lim_{a\to \infty} \int\limits_{-a}^a$). \end{frame} \begin{frame} Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определены на множестве функций, для которых интегралы, входящие в их определения, существуют в смысле главного значения. В это множество, например, попадают абсолютно интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Вычисление преобразований Фурье. Свойства преобразования Фурье, в частности, преобразование Фурье для сдвига и растяжения.

Тема 3. Масштабирующая функция. Преобразование Фурье масштабирующего уравнения. Функция отклика и ее свойства.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Функция $\varphi (x) \in L_2\left(\mbox{\Bbb R}\right)$ называется {\bf\it масштабирующей}, если она может быть представлена в виде $$ \varphi (x) = \sqrt{2}\sum\limits_{k\in \mbox{\Bbb Z}} h_k \varphi (2 x -k), \eqno(1) $$ причем $$ \sum\limits_{k\in \mbox{\Bbb Z}} \left|h_k\right|^2< \infty. $$

практическое занятие (4 часа(ов)):

Примеры масштабирующих функций.

Тема 4. Построение всплесков Добеши с помощью каскадного алгоритма.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Вейвлеты с компактным носителем и нулевыми моментами. Вейвлеты Добеши. Каскадный алгоритм.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Вывод основных соотношений. Изучение каскадного алгоритма.

Тема 5. Многомерный кратномасштабный анализ. Многомерные базисы всплесков. Сепарабельные и несепарабельные базисы.

лекционное занятие (1 часа(ов)):

Определение вейвлетов для случая RxR Кратномасштабный анализ пространства $L_2\left(\mathbb{R}^2\right)$, построенный как тензорное произведение кратномасштабных анализов пространств $L_2\left(\mathbb{R}\right)$, называется сепарабельным кратномасштабным анализом $L_2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Кратномасштабный анализ пространства $L_2\left(\mathbb{R}^2\right)$, не распадающийся в тензорное произведение одномерных КМА, называется несепарабельным кратномасштабным анализом.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Вывод основных соотношений. Аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты.

Тема 6. Всплески Хаара для двумерного случая.

лекционное занятие (1 часа(ов)):

Построение сепарабельного базиса на основе вейвлетов Хаара.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Получение расчетных формул.

Тема 7. Связь теории всплесков с методами компьютерной графики. Алгоритмы сжатия информации, основанные на всплесках Хаара

лекционное занятие (1 часа(ов)):

Разложение изображений. Схема.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Знакомство с алгоритмами сжатия.

Тема 8. Поиск информации по шаблону. Метрики формирования запроса изображения

лекционное занятие (1 часа(ов)):

Формирование шаблона - запроса на поиск изображения.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Изучение алгоритма поиска по шаблону.

Тема 9. Функция анализа всплесков в MatLab. Пакет Wavelet Toolbox

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Wavelet Toolbox пакета MatLab предоставляет функции для выполнения основных операций с вейвлетами (всплесками).

практическое занятие (4 часа(ов)):

Работа в пакете

Тема 10. Обработка сигналов в MatLab

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Функции обработки сигналов.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Работа в пакете

Тема 11. Обработка изображений в MatLab

практическое занятие (2 часа(ов)):

Разложение изображений в MatLab. Анализ изображения в MatLab.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Примеры вейвлетов. Функция и вейвлет Хаара. Пространство L2 и масштабирующая последовательность подпространств. Ортогональный кратномасштабный анализ. Базис Рисса. Определение вейвлетов.	2		подготовка к устному опросу	4	устный опрос
2.	Тема 2. Преобразование Фурье и оконное преобразование Фурье	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
3.	Тема 3. Масштабирующая функция. Преобразование Фурье масштабирующего уравнения. Функция отклика и ее свойства.	2		подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
4.	Тема 4. Построение всплесков Добеши с помощью каскадного алгоритма.	2		подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
5.	Тема 5. Многомерный кратномасштабный анализ. Многомерные базисы всплесков. Сепарабельные и несепарабельные базисы.	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
6.	Тема 6. Всплески Хаара для двумерного случая.	2		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
7.	Тема 7. Связь теории всплесков с методами компьютерной графики. Алгоритмы сжатия информации, основанные на всплесках Хаара	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
8.	Тема 8. Поиск информации по шаблону. Метрики формирования запроса изображения	2		подготовка домашнего задания	6	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
9.	Тема 9. Функция анализа всплесков в MatLab. Пакет Wavelet Toolbox	2		подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
10.	Тема 10. Обработка сигналов в MatLab	2		подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
11.	Тема 11. Обработка изображений в MatLab	2		подготовка к деловой игре	6	деловая игра
				подготовка к дискуссии	4	дискуссия
	Итого				62	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

активные и интерактивные формы

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Примеры вейвлетов. Функция и вейвлет Хаара. Пространство L2 и масштабирующая последовательность подпространств. Ортогональный кратномасштабный анализ. Базис Рисса. Определение вейвлетов.

устный опрос , примерные вопросы:

Доказательство ортогональности системы функций Хаара

Тема 2. Преобразование Фурье и оконное преобразование Фурье

домашнее задание , примерные вопросы:

Доказательство свойств преобразования Фурье. Преобразование Фурье функции Хаара. Преобразование Фурье вейвлета Хаара. Преобразование Фурье сплайнов.

Тема 3. Масштабирующая функция. Преобразование Фурье масштабирующего уравнения. Функция отклика и ее свойства.

домашнее задание , примерные вопросы:

Масштабирующие уравнение для функции Хаара. Масштабирующие уравнения для спалйнов степени 1 и 2.

Тема 4. Построение всплесков Добеши с помощью каскадного алгоритма.

домашнее задание , примерные вопросы:

Построение вейвлетов Добеши для N=2. Изучение каскадного алгоритма и его реализация.

Тема 5. Многомерный кратномасштабный анализ. Многомерные базисы всплесков. Сепарабельные и несепарабельные базисы.

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение способа построения сепарабельного базиса.

Тема 6. Всплески Хаара для двумерного случая.

домашнее задание , примерные вопросы:

Получение расчетных формул двумерного базиса Хаара.

Тема 7. Связь теории всплесков с методами компьютерной графики. Алгоритмы сжатия информации, основанные на всплесках Хаара

домашнее задание , примерные вопросы:

Знакомство с алгоритмами обработки изображений.

Тема 8. Поиск информации по шаблону. Метрики формирования запроса изображения

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение алгоритма поиска по шаблону

Тема 9. Функция анализа всплесков в MatLab. Пакет Wavelet Toolbox

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение возможностей пакета

Тема 10. Обработка сигналов в MatLab

домашнее задание , примерные вопросы:

Знакомство с функциями обработки сигналов

Тема 11. Обработка изображений в MatLab

деловая игра , примерные вопросы:

Обработка изображений в MatLab

дискуссия , примерные вопросы:

Обработка изображений в MatLab

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к зачету:

1 (2б). Кратномасштабным разложением пространства $L_2 ({\mathbb R})$ называется последовательность замкнутых вложенных попространств $ \cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots $, обладающая свойствами:

1) $\overline{\cup_{j=0}^\infty V_j} =L_2 ({\mathbb R})$;

2) $\cap_{j=-\infty}^\infty V_j= 0$;

3) $f(x) \in V_j$ тогда и только тогда, когда $f(2x) \in V_{j+1}$;

4) существует функция $\varphi (x) \in V_0$, которую называют масштабирующей, такая что

$$
\varphi_{0,n} (x) = \varphi(x-n), \quad n\in \mbox{\Bbb Z}
$$

(т.е. сдвиги функции φ) образуют базис Рисса пространства V_0.

\vspace{1mm}

2 (2б). Ортогональным кратномасштабным разложением пространства $L_2 ({\mathbb R})$ называется последовательность замкнутых вложенных подпространств $ \cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots , $ обладающая свойствами:

1) $\overline{\cup_{j=0}^\infty V_j} =L_2 ({\mathbb R})$;

2) $\cap_{j=-\infty}^\infty V_j=0$;

3) $f(x) \in V_j$ тогда и только тогда, когда $f(2x) \in V_{j+1}$;

4) существует функция $\varphi (x) \in V_0$, которую называют масштабирующей, такая что

$$
\varphi_{0,n} (x) = \varphi(x-n), \quad n\in \mbox{\Bbb Z}
$$

(т.е. сдвиги функции φ) образуют ортонормированный
базис пространства V_0.

\vspace{1mm}

3 (1б). Если последовательность подпространств
\[
\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots
\]
образует кратномасштабный анализ,
то для каждого целого j
ортогональное дополнение W_j к пространству V_j в пространстве
V_{j+1} называется пространством всплесков, а его элементы
называются \textbf{всплесками}.

\vspace{1mm}

4 (2б). Функция $\varphi (x) \in L_2\left({\mathbb R}\right)$
называется {\bf\it масштабирующей}, если она может быть представлена
в виде
\[
\varphi (x) = \sqrt{2}\sum\limits_{k\in \mbox{\Bbb Z}} h_k \varphi
(2 x -k), \eqno(1)
\]
причем
$
\sum\limits_{k\in \mbox{\Bbb Z}} \left|h_k\right|^2< \infty.
$

\vspace{1mm}

5 (1б). Функция Хаара
\[
\varphi (x) = \left\{
\begin{array}{ll}
1,& 0 \leqslant x<1, \\
0,& x\not\in [0,1).
\end{array}
\right.
\]

\vspace{1mm}

6 (1б). Всплеск Хаара
\[
\psi (x) = \left\{
\begin{array}{ll}
1,& 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\
-1,& \frac{1}{2}\leqslant x <1,\\
0,& x\not\in[0,1).
\end{array}
\right.
\]

\vspace{1mm}

7 (4б). Пусть
\[
\varphi_{jn}(x)=\sqrt{2^j} \varphi\left(2^j x - n\right), \quad j,n
\in {\mathbb Z}.
\]
Доказать, что $supp \varphi_{jn} =
\left[\frac{n}{2^j},\frac{n+1}{2^j}\right]$.

\vspace{1mm}

8 (2б). %Примеры масштабирующих уравнений
Для функции Хаара масштабирующее уравнение имеет вид
\[
\varphi (x)= \varphi (2x) + \varphi(2x-1) = \sqrt{2}
\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi (2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi
(2x-1)\right).
\]

\vspace{1mm}

9 (2б). %Примеры масштабирующих уравнений
Для сплайна степени 1
$$
\varphi (x)=
\left\{
\begin{array}{ll}
1-|x|,&-1\le x \le 1, \\
0,&x\not\in [-1,1],
\end{array}
\right.
$$
масштабирующее уравнение имеет вид
$$
\varphi (x)= \frac{1}{2} \varphi (2 x + 1) + \varphi (2 x)
+ \frac{1}{2} \varphi (2x-1).
$$

\vspace{1mm}

10 (3б). Пусть $a \in {\mathbb R}$, $a\ne 0$ и $f \in
L_1\left({\mathbb R}\right)$. Справедливо равенство
\[
F\left[f(a x)\right] (\omega) = \frac{1}{|a|} {\hat f} \left(\frac{\omega}{a}\right),
\]
где F --- преобразование Фурье.

\vspace{1mm}

11 (3б). Пусть $a \in {\mathbb R}$, $a\ne 0$ и $f \in
L_1\left({\mathbb R}\right)$. Если D_a --- оператор растяжения:
\[
D_a f(x) \; {\buildrel\rm def\over=} \; f\left(\frac{x}{a}\right),

\]
то для преобразования Фурье F справедливо равенство
\[
F\left[D_a f\right] (\omega) = |a| D_{\frac{1}{a}} F[f] (\omega).
\]

\vspace{1mm}

12 (3б). Пусть $b, \tau \in {\mathbb R}$ и $f \in L_1\left({\mathbb R}\right)$. Справедливо равенство
\[
F\left[f(x-b)\right](\omega)=e^{-i\omega b} {\hat f} (\omega), \quad F\left[e^{ix\tau} f(x)\right](\omega)=
{\hat f} (\omega -\tau),
\]
где F --- преобразование Фурье.

\vspace{1mm}

13 (3б). Пусть $b, \tau \in {\mathbb R}$ и $f \in L_1\left({\mathbb R}\right)$. Если T_b --- оператор сдвига:
\[
T_b f(x) \; {\buildrel\rm def\over=}\; f(x-b),
\]
то для преобразования Фурье F справедливо равенство
\[
F\left[T_b f\right] (\omega) = e^{-i\omega b} F[f] (\omega).
\]

\vspace{1mm}

14 (3б). Преобразование Фурье функции Хаара:
\[
\hat \varphi (\omega) = e^{-i \frac{\omega}{2}} \frac{\sin
\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega /2}.
\]

\vspace{1mm}

15 (3б). Преобразование Фурье всплеска Хаара:
\[
\hat \psi (\omega) = i e^{-i\frac{\omega}{2}}\frac{\sin^2
\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\omega /4}.
\]

\vspace{1mm}

16 (3б). Для масштабирующего уравнения
\[
\varphi (x) = \sqrt{2}\sum\limits_{k\in \mathbb{Z}} h_k \varphi
(2 x -k),
\]
преобразование Фурье имеет вид
\[
{\hat \varphi} (\omega) =\frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{k\in

\mathbb{Z}} h_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} {\hat \varphi}
\left(\frac{\omega}{2}\right).
\]

\vspace{1mm}

17 (4б). С помощью функции отклика
\[
m_0 (\omega)=H_0 (\omega) =\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{k\in
\mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}.
\]
масштабирующее уравнение записывается в виде
\[
{\hat\varphi} (\omega) =m_0 \left(
\frac{\omega}{2}\right) {\hat
\varphi} \left(\frac{\omega}{2} \right).
\]

\vspace{1mm}

18 (1б). Если m_0 -- функция отклика, то
\[
m_0 (0) = 1.
\]

\vspace{1mm}

19 (1б). Функция отклика m_0 имеет период, равный
2π.

\vspace{1mm}

20 (2б). Справедливо равенство
\[
{\hat \varphi} (\omega) = c \prod\limits_{k=1}^\infty m_0
\left(\frac{\omega}{2^k} \right),
\]

\vspace{1mm}

21 (2б). Если m_0 -- функция отклика, то почти всюду выполнено
равенство
\[
\left|m_0(\omega)\right|^2 + \left|m_0(\omega + \pi)\right|^2 = 1.
\]

\vspace{1mm}

22 (4б). Система $\left\{\varphi(x-k):k\in \mathbb{Z}\right\}$
сдвигов функции $\varphi \in L_2 \left(\mathbb{R}\right)$ является
ортонормированной тогда и только тогда, когда почти всюду
\[
\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\hat \varphi (\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1.
\]

23 (4б). Система $\left\{\varphi(x-k):k\in \mathbb{Z}\right\}$
сдвигов функции $\varphi \in L_2 \left(\mathbb{R}\right)$ образуют
базис Рисса пространства V_0 тогда и только тогда, когда

существуют положительные константы A_1 и A_2 такие, что почти
всюду
\[
A_1 \leqslant \sum\limits_{k\in \mathbb{Z}} \left|{\hat \varphi}
\left(\omega + 2 \pi k\right)\right|^2 \leqslant A_2.
\]
\vspace{1mm}
24 (4б). Пространства $\{V_j\}_j$ образуют цепочку вложенных
пространств $\cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$,
тогда и только тогда, когда существует 2π--периодическая
функция $m_0 \in L_2 \left(0,2\pi\right)$, т.ч. почти всюду
\[
\hat \varphi (\omega)=m_0 \left(\frac{\omega}{2}\right) \hat \varphi \left(\frac{\omega}{2}\right).
\]
\vspace{1mm}
25 (4б). Если масштабирующая функция $\varphi \in
L_2\left(\mathbb{R}\right)$ удовлетворяет условию
\[
A_1 \leqslant \sum\limits_{k\in \mathbb{Z}} \left|{\hat \varphi}
\left(\omega + 2 \pi k\right)\right|^2 \leqslant A_2
\]
и ${\hat\varphi} (\omega)$ ограничена для всех ω, непрерывна в
окрестности $\omega=0$ и ${\hat \varphi} (0) \ne 0$, то
$$
\overline{\bigcup_{j=0}^\infty V_j} =L_2 (\mathbb{R}).
$$
26 (6б). Пусть последовательность замкнутых подпространств $ \cdots
\subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots $ образует
ортогональный кратномасштабный анализ пространства
$L_2\left(\mathbb{R}\right)$ и φ -- масштабирующая функция.
Тогда обратное преобразование Фурье функции
\[
{\hat \psi} (\omega) = e^{i\frac{\omega}{2}} \overline{m_0
\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)} {\hat \varphi}
\left(\frac{\omega}{2}\right)
\]
является базисным всплеском, т.е.
сдвиги $\psi_{0k}(x)=\psi (x-k)$ ($k\in \mathbb{Z}$)
образуют ортонормированный базис пространства W_0.
\vspace{1mm}
27 (3б). Функция
%$f \in L_1 \left(\mathbb{R}\right)$
$f \in L_2 \left(\mathbb{R}\right)$
называется функцией с ограниченным спектром, если
$
\hat f (\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R} \setminus \left[-\Omega,\Omega\right],

$
для некоторого Ω.

\vspace{1mm}

28 (6б). \textbf{Теорема Котельникова--Шеннона}. Пусть непрерывная
функция f является функцией с Ω--ограниченным спектром.
%
% Если в определении функции с ограниченным спектром предполагали, что $f \in L_1$,
% то нужно дополнительное предположение, например, как в книге Блаттера, стр. 70
%
Если шаг выборки Δx удовлетворяет условию
\[
\Delta x \leqslant \frac{\pi}{\Omega},
\]
то функция $f(x)$ восстанавливается единственным образом по дискретному
набору значений
$
y_k = f\left(k \Delta x\right), k \in \mathbb{Z}
$
и справедлива формула
\[
f(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} f \left(k \Delta x\right)
\frac{\sin \left(\frac{\pi}{\Delta x} x-\pi k\right)}{\frac{\pi}{\Delta x} x -\pi k}.
\]

\vspace{1mm}

29 (2б). Кратномасштабный анализ с масштабирующей функцией
\[
\varphi (x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.
\]
называется кратномасштабным анализом Котельникова--Шеннона.

\vspace{1mm}

30 (3б). Функция
\[
\psi (x) =
\frac{\sin 2\pi \left(x+\frac{1}{2}\right) -
\sin \pi \left(x+\frac{1}{2}\right)}{\pi \left(x+\frac{1}{2}\right)}
\]
называется всплеском Котельникова--Шеннона.

\vspace{1mm}

31. (6б) Доказать, что из компактности носителя следует, что в
разложении $ \varphi (x) = \sum_k h_k \varphi_{1k} (x) $ только
конечное число коэффициентов $h_{k_1}, \ldots, h_{k_r}$ отлично от
нуля.

\vspace{1mm}

32. (10б) Доказать, что если масштабирующая функция $ \varphi (x) =
\sum_k h_k \varphi (2x-k)$ имеет носитель $[a,b]$, то числа a и

b являются целыми и только те коэффициенты h_k отличны от нуля, индексы которых попадают в набор $a\leqslant k \leqslant b$.

7.1. Основная литература:

Введение в анализ, Гумеров, Ренат Нельсонович;Султанбеков, Фоат Фаритович, 2011г.

Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры, Фрейзер, Майкл;Жилейкин, Я. М., 2012г.

Вейвлет-анализ и его приложения: Учебное пособие / Т.В. Захарова, О.В. Шестаков. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 158 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование). (обложка) ISBN 978-5-16-005055-3, 500 экз. http://znanium.com/bookread.php?book=234103

7.2. Дополнительная литература:

Технология программирования. Базовые конструкции C/C++, Липачёв, Евгений Константинович, 2012г.

Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. - Изд. 2-е испр. и перераб. / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 748 с. - ISBN 5-94157-604-08. http://www.znanium.com/bookread.php?book=349842

Численные методы и программирование: Учебное пособие / В.Д. Колдаев; Под ред. Л.Г. Гагариной. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 336 с.: ил.; 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет) ISBN 978-5-8199-0333-9, 300 экз. http://www.znanium.com/bookread.php?book=452274

Численные методы и программирование: Учебное пособие / В.Д. Колдаев; Под ред. Л.Г. Гагариной. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 336 с.: ил.; 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет) ISBN 978-5-8199-0333-9, 2000 экз. http://www.znanium.com/bookread.php?book=370603

7.3. Интернет-ресурсы:

Методы сжатия изображений - http://www.intuit.ru/studies/courses/1069/206/info

Сжатие изображений с потерями - http://www.intuit.ru/studies/courses/993/163/lecture/4517?page=4

Wavelet Toolbox - http://matlab.ru/products/wavelet-toolbox

Wavelet Toolbox - Обработка сигналов и изображений - http://matlab.exponenta.ru/wavelet/index.php

Модуль анализа мимики лица Intel Perceptual Computing - http://www.intuit.ru/studies/courses/10619/1103/lecture/18229?page=1

Список Интернет-ресурсов по вейвлет-функциям - http://matlab.exponenta.ru/wavelet/links/links.php

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Приложения теории вейвлетов в компьютерной графике" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB,audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудованием имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Пакеты MatLab и Mathematica

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010200.68 "Математика и компьютерные науки" и магистерской программе Методы математического и алгоритмического моделирования общенаучных и прикладных задач .

Автор(ы):
Липачев Е.К. ____________________
"__" _________ 201 __ г.

Рецензент(ы):
Агачев Ю.Р. ____________________
"__" _________ 201 __ г.