

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины
Асимптотический анализ М1.Б.4

Направление подготовки: 231300.68 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Даутов Р.З.

Рецензент(ы):

Соловьев С.И.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры № ____ от " ____ " 201 ____ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК № ____ от " ____ " 201 ____ г

Регистрационный № 9113714

Казань

2014

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (доцент) Даутов Р.З. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики ,
Rafail.Dautov@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Излагаются основные понятия и методы асимптотического анализа при вычислении функций, интегралов, решений интегральных и дифференциальных уравнений. Существенно используется материал общих курсов "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения", "Уравнения математической физики".

Основная цель курса - сообщить материал и привить навыки, необходимые при математическом моделировании, построении и исследовании численно-аналитических методов решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " М1.Б.4 Общенаучный" основной образовательной программы 231300.68 Прикладная математика и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 1 курсе, 2 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 1 курсе во 2 семестре для студентов-магистров, обучающихся по направлению "Прикладная математика (Математическое моделирование)".

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-1 (профессиональные компетенции)	способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов, теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные принципы и методы асимптотического анализа решений интегральных и дифференциальных уравнений

2. должен уметь:

применять теоретические знания для решения практических задач.

3. должен владеть:

теоретическими знаниями о понятиях и методах, связанных с решением типичных задач математического анализа,
и дифференциальных уравнений.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

приобрести навыки самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с асимптотическим анализом решений разнообразных задач анализа, интегральных и дифференциальных уравнений

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет зачетных(ые) единиц(ы) 72 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет во 2 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Алгебраические уравнения с малым параметром	2		0	0	3	домашнее задание
2.	Тема 2. Асимптотические разложения	2		0	0	3	домашнее задание
3.	Тема 3. Асимптотические разложения интегралов: локальные вклады	2		0	0	3	домашнее задание
4.	Тема 4. Асимптотические разложения интегралов: нелокальные вклады	2		0	0	3	домашнее задание контрольная работа
5.	Тема 5. Регулярные разложения решений дифференциальных уравнений	2		0	0	3	домашнее задание
6.	Тема 6. Сингулярные дифференциальные уравнения. Сращивание разложений решения	2		0	0	3	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
7.	Тема 7. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений в неограниченных областях. Логарифмические члены	2		0	0	4	домашнее задание
8.	Тема 8. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений. Подслои	2		0	0	3	домашнее задание
9.	Тема 9. Метод растянутых координат	2		0	0	3	домашнее задание контрольная работа
10.	Тема 10. Метод многих масштабов	2		0	0	4	домашнее задание
.	Тема . Итоговая форма контроля	2		0	0	0	зачет
	Итого			0	0	32	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Алгебраические уравнения с малым параметром

лабораторная работа (3 часа(ов)):

Асимптотический анализ решений квадратного уравнения с малым параметром при старшем члене. Понятие о формальном асимптотическом разложении (ФАР). Разложения в конечной и бесконечно удаленной точке. Разложение по нецелым степеням малого параметра на примере другого уравнения второго порядка. Итерационный метод построения асимптотического разложения решения. Примеры построения итерационной функции.

Тема 2. Асимптотические разложения

лабораторная работа (3 часа(ов)):

Понятие об асимптотической последовательности и асимптотическом разложении на примере вычисления функции ошибок на всей оси. Определение асимптотической последовательности и асимптотического разложения. Единственность асимптотического разложения.

Асимптотическое разложение функции, зависящей от параметра. Примеры разложений.

Понятие о внутреннем и внешнем разложении. Понятие о промежуточных переменных и области перекрытия. Принцип сращивания разложений. Составное разложение.

Тема 3. Асимптотические разложения интегралов: локальные вклады

лабораторная работа (3 часа(ов)):

Лемма Ватсона. Пример: формула Стирлинга. Метод стационарной фазы. Метод перевала. Пример: функция Эйри.

Тема 4. Асимптотические разложения интегралов: нелокальные вклады

лабораторная работа (3 часа(ов)):

Нелокальные вклады в асимптотические разложения интегралов. Метод расщепления. Пример. Анализ интегрального уравнения для определения электрической емкости длинного тонкого тела.

**Тема 5. Регулярные разложения решений дифференциальных уравнений
лабораторная работа (3 часа(ов)):**

Понятие о регулярных возмущениях дифференциальных уравнений. Типы возмущений. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Полиномы Лежандра. Формальное асимптотическое разложение потенциала вблизи близкого к сфере тела. Задача нахождения формы вращающегося самогравитирующего жидкого тела. Разложение решения нелинейного ОДУ в случае возмущения коэффициента при нелинейности.

**Тема 6. Сингулярные дифференциальные уравнения. Сращивание разложений
решения**

лабораторная работа (3 часа(ов)):

Сингулярные возмущения дифференциальных уравнений. Задача конвективной диффузии с преобладанием конвекции. Формальные разложения. Сращивание внешнего и внутреннего разложений. Составное разложение. Способы определения толщины пограничного слоя. Определение положения пограничного слоя.

**Тема 7. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений в
неограниченных областях. Логарифмические члены**

лабораторная работа (4 часа(ов)):

Модельная задача для задачи об установившемся обтекании сферы потоком вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. Формальные разложения. Сращивание внешнего и внутреннего разложений. Задача об установившемся медленном обтекании однородным на бесконечности потоком вязкой несжимаемой жидкости сферы единичного радиуса. Решение Стокса. Задача Оззена.

**Тема 8. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений. Подслои
лабораторная работа (3 часа(ов)):**

Задача о стационарном теплообмене цилиндра с обтекающим его потенциальным потоком идеальной жидкости. Теплообмен при больших числах Пекле. Определение главного члена внутреннего разложения. Решение в подслое. Построение асимптотического решения. Задача о динамическом гистерезисе. Жидкости Ван-дер-Ваальса. Формальные разложения. Сращивание внешнего и внутреннего разложений.

Тема 9. Метод растянутых координат

лабораторная работа (3 часа(ов)):

Понятие о методе растянутых координат. Осциллятор Дюффинга. О методе Линдштедта-Пуанкаре. Задача Лайтхилла. Равномерное разложение решения. Одномерные волны на мелкой воде. Асимптотическое решение. Изучение опрокидывания волн.

Тема 10. Метод многих масштабов

лабораторная работа (4 часа(ов)):

Осциллятор Ван-дер-Поля с малой нелинейностью. Выделение различных временных масштабов. Вычисление главного члена асимптотического разложения решения. Решение задачи о линейном осцилляторе со слабым затуханием. Неустойчивость уравнения Маттье (колебание математического маятника при слабом периодическом изменении его длины). Двух-масштабное разложение решения. Задача о ламинарном потоке жидкости внутри длинной трубы. Конвективная (тейлоровская) дисперсия. Асимптотики решения. Вычисление эффективного коэффициента диффузии.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Алгебраические уравнения с малым параметром	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
2.	Тема 2. Асимптотические разложения	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
3.	Тема 3. Асимптотические разложения интегралов: локальные вклады	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
4.	Тема 4. Асимптотические разложения интегралов: нелокальные вклады	2		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
5.	Тема 5. Регулярные разложения решений дифференциальных уравнений	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
6.	Тема 6. Сингулярные дифференциальные уравнения. Сращивание разложений решений	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
7.	Тема 7. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений в неограниченных областях. Логарифмические члены	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
8.	Тема 8. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений. Подслои	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
9.	Тема 9. Метод растянутых координат	2		подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
10.	Тема 10. Метод многих масштабов	2		подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
	Итого				40	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лабораторных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Изучение курса подразумевает получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к зачету. При подготовке к сдаче зачета весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Алгебраические уравнения с малым параметром

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Для данного кубического уравнения вычислить а) первый б) второй член в асимптотическом разложении всех вещественных корней (уравнения различаются вхождением малого параметра в коэффициенты уравнения). Для данного нелинейного уравнения найти а) первый б) второй член в асимптотическом разложении всех вещественных корней.

Тема 2. Асимптотические разложения

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Получить асимптотическое разложение интегрального а) синуса б) косинуса с) экспоненты при больших значениях аргумента. Выяснить, является оно сходящимся или расходящимся. Используя интегрирование по частям, найдите асимптотическое разложение интеграла при малых x . Покажите, что разложение расходится. Для данных функций найдите два члена разложения при а) $x=O(\epsilon)$ б) $x=O(1)$ с) $x=O(1/\epsilon)$. Покажите, что полученные разложения удовлетворяют принципу сращивания. Для данных функций найдите два члена разложения при а) $x=O(\epsilon)$ б) $x=O(1)$. Постройте составное разложение.

Тема 3. Асимптотические разложения интегралов: локальные вклады

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Получить асимптотическое представление интегралов при больших значениях аргумента. Получить главный член асимптотического представления интегралов при больших значениях x . Найти асимптотическое поведение интеграла при больших значениях x и $z=O(1)$.

Тема 4. Асимптотические разложения интегралов: нелокальные вклады

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Вычислить первые два члена при малых r и первые четыре члена при больших r разложения данных интегралов. Функция g удовлетворяет интегральному уравнению. Найти два главных члена асимптотического представления при фиксированном z .

контрольная работа , примерные вопросы:

Примерные вопросы. 1) Для данного кубического уравнения вычислить первые два члена асимптотическом разложении всех вещественных корней; 2) Получить асимптотическое разложение заданной функции при больших значениях аргумента. Выяснить, является оно сходящимся или расходящимся. 3) Для функции, удовлетворяющей интегральному уравнению, найти два главных члена асимптотического представления при фиксированном значении аргумента.

Тема 5. Регулярные разложения решений дифференциальных уравнений

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Рассмотреть двумерное безвихревое обтекание идеальной жидкостью тела, близкого к кругу. Считая поток на бесконечности однородным и параллельным оси x , вычислить первые три главных члена ФАР. Является ли полученное разложение регулярным? . Продольная скорость стоксовского потока вязкой жидкости, индуцированная единичным перепадом давления, вдоль слабо гофрированного канала может быть найдена как периодическое по x решение данной задачи. Найти первые три члена асимптотического разложения и вычислить средний поток, приходящийся на единицу ширины канала. Как он измениться по сравнению со случаем плоского канала?

Тема 6. Сингулярные дифференциальные уравнения. Сращивание разложений решения

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Для данных краевых задач для ОДУ найти перенормировку для пограничного слоя вблизи $x=0$ и получить главный член внутреннего разложения. Далее найти главный член внешнего разложения и срастить внешнее разложение с внутренним. Для данных краевых задач для ОДУ определить положение погранслоев и найти главные члены внешнего и внутреннего разложений. Вычислить три главных члена внешнего асимптотического решения данной задачи. Установить неравномерность асимптотики. Найти перенормировку для пограничного слоя и вычислить два члена внутреннего разложения.

Тема 7. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений в неограниченных областях. Логарифмические члены

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Функция, зависящая от параметра eps , удовлетворяет данному уравнению. Используя заданную асимптотическую последовательность, включающую логарифмические члены, получить асимптотические разложения решения при фиксированных r и $r \text{eps}$. Срастить их. Применить метод линеаризации к задаче стационарного обтекания сферы однородным потоком вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. Заменить цилиндр на сферу в задаче о теплообмене тела с медленным потенциальным потоком обтекающей его жидкости.

Тема 8. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений. Подслои

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Рассмотреть осесимметричную задачу о теплообмене сферы с обтекающим ее потенциальным потоком идеальной жидкости при больших значениях критерия Пекле. Используя полярные координаты, в которых поле скоростей имеет данный вид, найдите разложение решения. Подсчитайте суммарный тепловой поток от сферы в жидкость.

Рассмотреть данную ?трехпалубную? задачу. Вычислить последовательно два члена внешнего разложения, затем два члена погранслойного разложения, и, наконец, один член подслойного разложения.

Тема 9. Метод растянутых координат

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Найти третий член асимптотического разложения в задаче об осцилляторе Дюффинга. Методом Линдштедта-Пуанкаре найти два главных члена в равномерно пригодном асимптотическом разложении решения данной задачи. Изучить данную задачу Коши для ОДУ первого порядка: а) построить прямое разложение. Найти область, в которой оно непременно. б) Использовать метод растянутых координат для нахождения равномерно пригодного разложения. с) построить точное решение, поменяв местами зависимую и независимую переменную, и сравнить его с построенным в б) разложением.

контрольная работа , примерные вопросы:

Примерные вопросы. 1) Для данных краевых задач для ОДУ найти перенормировку для пограничного слоя вблизи $x=0$ и получить главный член внутреннего разложения. Далее найти главный член внешнего разложения и срастить внешнее разложение с внутренним. 2) Методом Линдштедта-Пуанкаре найти два главных члена в равномерно пригодном асимптотическом разложении решения данной задачи.

Тема 10. Метод многих масштабов

домашнее задание , примерные вопросы:

Примерные вопросы. Найти главный член асимптотического разложения при $x=O(1/\epsilon)$ общего решения системы из двух ОДУ. Найти главный член асимптотического разложения при $x=O(1/\epsilon)$ решения краевой задачи для данной системы из двух ОДУ. Распространить выкладки для уравнения Матье при $n=1$ на случай $n=2$.

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к зачету:

Примерные вопросы. Асимптотический анализ решений алгебраических уравнений с малым параметром. Разложения в конечной и бесконечно удаленной точке. Итерационный метод построения асимптотического разложения. Асимптотические последовательности и асимптотические разложения. Единственность асимптотического разложения.

Асимптотическое разложение функции, зависящей от параметра. Примеры разложений. Внутреннее и внешнее разложения. Принцип сращивания разложений.

Асимптотические разложения интегралов: метод стационарной фазы, метод перевала, метод расщепления. Анализ решения интегрального уравнения для определения электрической емкости длинного тонкого тела. Регулярные разложения решений дифференциальных уравнений. Примеры. Сингулярные возмущения дифференциальных уравнений: сращивание внешнего и внутреннего разложений, составное разложение. Способы определения толщины пограничного слоя. Определение положения пограничного слоя. Сращивание разложений решений дифференциальных уравнений в неограниченных областях. Метод растянутых координат. Метод Линдштедта-Пуанкаре. Задача об одномерных волнах на мелкой воде: асимптотическое решение, опрокидывания волн. Осциллятор Ван-дер-Поля с малой нелинейностью. Вычисление главного члена асимптотического разложения решения. Задача о ламинарном потоке жидкости внутри длинной трубы: асимптотики решения, вычисление эффективного коэффициента диффузии.

7.1. Основная литература:

1. Ильин, А. М., Данилин, А.Р. Асимптотические методы в анализе. - М.: Физматлит, 2009. - 248 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4823
2. Даутов Р.З. Метод Галеркина с возмущениями для задач на собственные значения. [Учебное пособие]. - Казань, 2010. - 94 с.http://kpfu.ru/publication?p_id=21045,
<URL:http://libweb.ksu.ru/ebooks/09-IVMIT/09_65_2010_000095.pdf>.
3. Ф. Г. Авхадиев Численные методы анализа: учебное пособие. - Казань: КФУ, 2013
http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_039_000398.pdf
4. Макаров, Б. М. Лекции по вещественному анализу: учебник / Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов. ? СПб.: БХВ-Петербург, 2011. ? 688 с. ? (Учебная литература для вузов). - ISBN 978-5-9775-0631-1. <http://znanium.com/bookread.php?book=355014>

7.2. Дополнительная литература:

1. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней / С.А. Назаров .? Новосибирск : Научная книга, 2002.
Т.1: Понижение размерности и интегральные оценки .? Новосибирск : Научная книга, 2002 .? 406с. ? Библиогр.: с.390-398 .? ISBN 5-88119-031-9.
2. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. - СПб.: Лань, 2005. - 160с
ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=377

7.3. Интернет-ресурсы:

Википедия - <http://ru.wikipedia.org>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Портал ресурсов по естественно-научным дисциплинам - <http://en.edu.ru/>

Справочник по компьютерной математике - <http://www.users.kaluga.ru/math/>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Асимптотический анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Практические занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 231300.68 "Прикладная математика" и магистерской программе Математическое моделирование .

Автор(ы):

Даутов Р.З. _____

"__" 201__ г.

Рецензент(ы):

Соловьев С.И. _____

"__" 201__ г.