

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Минзарипов Р.Г.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Группы Ли и расслоения БЗ.ДВ.4

Направление подготовки: 010100.62 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Шурыгин В.В.

**Рецензент(ы):**

Фомин В.Е.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой:

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2014

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Шурыгин В.В. Кафедра геометрии отделение математики , vadim.shurygin

### **1. Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины (модуля) "Группы Ли и расслоения" являются: ознакомление с основными понятиями и методами теории групп Ли и локально тривиальных расслоений; теоретическая и практическая подготовка в области исследования геометрических структур на многообразиях; овладение современным математическим аппаратом, применяемым в геометрических исследованиях, для дальнейшего использования в приложениях.

### **2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования**

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б3.ДВ.4 Профессиональный" основной образовательной программы 010100.62 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 4 курсе, 8 семестр.

Дисциплина "Группы Ли и расслоения" входит в вариативную часть цикла профессиональных дисциплин. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: аналитической геометрии, математического анализа, дифференциальной геометрии и топологии, линейной алгебры, абстрактной алгебры, теории гладких многообразий и римановой геометрии.

Приобретенные знания в результате освоения дисциплины "Группы Ли и расслоения" будут полезны в научно-исследовательской работе.

### **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля**

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

определения и свойства основных объектов теории групп Ли и локально тривиальных расслоений, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.

2. должен уметь:

решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории групп Ли и локально тривиальных расслоений, устанавливать взаимосвязи между понятиями, доказывать утверждения.

3. должен владеть:

методами решения различных задач теории групп Ли и расслоенных пространств.

### **4. Структура и содержание дисциплины/ модуля**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных(ые) единиц(ы) 216 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет и экзамен в 8 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

**4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю**  
**Тематический план дисциплины/модуля**

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Группа Ли. Примеры групп Ли. Конструкция Кэли. Ортогональная группа $O(n)$ . Ее свойства. Полная линейная группа $GL(n, R)$ . Ее свойства. Специальная линейная группа $SL(n, R)$ . Ее свойства. Комплексная линейная группа $GL(n, C)$ . Симплектическая группа $Sp(n, R)$ . Унитарная группа.	8	1-2	0	0	0	
2.	Тема 2. Алгебра Ли. Примеры алгебр Ли. Структурные константы. Левые и правые сдвиги на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли. Алгебра Ли группы обратимых элементов ассоциативной алгебры. Алгебры Ли групп $GL(n, R)$ и $GL(n, C)$ . Алгебра Ли $o(n)$ группы Ли $O(n)$ .	8	3-4	0	0	0	
3.	Тема 3. Однопараметрические подгруппы групп Ли. Левоинвариантные внешние формы на группе Ли. Уравнения Маурера-Картана. Присоединенное представление группы Ли. Группы Ли Преобразований. Фундаментальные векторные поля.	8	5-6	0	0	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
4.	Тема 4. Локально тривиальные расслоения. Функции склейки. Морфизмы локально тривиальных расслоений. Обратный образ расслоения. Расслоенное произведение. Накрытия. Сечения расслоения. Расслоение с фундаментальной группой. Примеры расслоений. Расслоения Хопфа. Векторные и аффинные расслоения. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия.	8	7-8	0	0	0	
5.	Тема 5. Главные расслоения. Функции склейки главного расслоения. Расслоение линейных реперов дифференцируемого многообразия. Морфизмы главных расслоений. Расслоение ортонормированных реперов риманова многообразия. Ассоциированные расслоения. Касательное расслоение как расслоение, ассоциированное с расслоением линейных реперов. Тензорные расслоения.	8	9-10	0	0	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
6.	Тема 6. Связность в главном расслоении. Фундаментальные векторные поля. Существование связности в главном расслоении. Параллельное перенесение. Группа голономии. Гомоморфизмы связностей. Связность в присоединенном расслоении. Форма кривизны. Структурное уравнение связности.	8	11-12	0	0	0	
7.	Тема 7. Расслоения струй. Дифференциальные группы высших порядков. Расслоения реперов высших порядков. Расслоения дифференциальногеометрических объектов. Расслоение объекта линейной связности как присоединенное к расслоению реперов второго порядка.	8	13-14	0	0	0	
	Тема . Итоговая форма контроля	8		0	0	0	экзамен зачет
	Итого			0	0	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Группа Ли. Примеры групп Ли. Конструкция Кэли. Ортогональная группа  $O(n)$ . Ее свойства. Полная линейная группа  $GL(n, R)$ . Ее свойства. Специальная линейная группа  $SL(n, R)$ . Ее свойства. Комплексная линейная группа  $GL(n, C)$ . Симплектическая группа  $Sp(n, R)$ . Унитарная группа.**

**Тема 2. Алгебра Ли. Примеры алгебр Ли. Структурные константы. Левые и правые сдвиги на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли. Алгебра Ли группы обратимых элементов ассоциативной алгебры. Алгебры Ли групп  $GL(n, R)$  и  $GL(n, C)$ . Алгебра Ли  $o(n)$  группы Ли  $O(n)$ .**

**Тема 3. Однопараметрические подгруппы групп Ли. Левоинвариантные внешние формы на группе Ли. Уравнения Маурера-Картана. Присоединенное представление группы Ли. Группы Ли Преобразований. Фундаментальные векторные поля.**

**Тема 4. Локально тривиальные расслоения. Функции склейки. Морфизмы локально тривиальных расслоений. Обратный образ расслоения. Расслоенное произведение. Накрытия. Сечения расслоения. Расслоение с фундаментальной группой. Примеры расслоений. Расслоения Хопфа. Векторные и аффинные расслоения. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия.**

**Тема 5. Главные расслоения. Функции склейки главного расслоения. Расслоение линейных реперов дифференцируемого многообразия. Морфизмы главных расслоений. Расслоение ортонормированных реперов риманова многообразия. Ассоциированные расслоения. Касательное расслоение как расслоение, ассоциированное с расслоением линейных реперов. Тензорные расслоения.**

**Тема 6. Связность в главном расслоении. Фундаментальные векторные поля. Существование связности в главном расслоении. Параллельное перенесение. Группа голономии. Гомоморфизмы связностей. Связность в присоединенном расслоении. Форма кривизны. Структурное уравнение связности.**

**Тема 7. Расслоения струй. Дифференциальные группы высших порядков. Расслоения реперов высших порядков. Расслоения дифференциальногеометрических объектов. Расслоение объекта линейной связности как присоединенное к расслоению реперов второго порядка.**

## **5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения**

активные и интерактивные формы проведения занятий.

**6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

**Тема 1. Группа Ли. Примеры групп Ли. Конструкция Кэли. Ортогональная группа  $O(n)$ . Ее свойства. Полная линейная группа  $GL(n, \mathbb{R})$ . Ее свойства. Специальная линейная группа  $SL(n, \mathbb{R})$ . Ее свойства. Комплексная линейная группа  $GL(n, \mathbb{C})$ . Симплектическая группа  $Sp(n, \mathbb{R})$ . Унитарная группа.**

**Тема 2. Алгебра Ли. Примеры алгебр Ли. Структурные константы. Левые и правые сдвиги на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли. Алгебра Ли группы обратимых элементов ассоциативной алгебры. Алгебры Ли групп  $GL(n, \mathbb{R})$  и  $GL(n, \mathbb{C})$ . Алгебра Ли  $\mathfrak{o}(n)$  группы Ли  $O(n)$ .**

**Тема 3. Однопараметрические подгруппы групп Ли. Левоинвариантные внешние формы на группе Ли. Уравнения Маурера-Картана. Присоединенное представление группы Ли. Группы Ли Преобразований. Фундаментальные векторные поля.**

**Тема 4. Локально тривиальные расслоения. Функции склейки. Морфизмы локально тривиальных расслоений. Обратный образ расслоения. Расслоенное произведение. Накрытия. Сечения расслоения. Расслоение с фундаментальной группой. Примеры расслоений. Расслоения Хопфа. Векторные и аффинные расслоения. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия.**

**Тема 5. Главные расслоения. Функции склейки главного расслоения. Расслоение линейных реперов дифференцируемого многообразия. Морфизмы главных расслоений. Расслоение ортонормированных реперов риманова многообразия. Ассоциированные расслоения. Касательное расслоение как расслоение, ассоциированное с расслоением линейных реперов. Тензорные расслоения.**

**Тема 6. Связность в главном расслоении. Фундаментальные векторные поля. Существование связности в главном расслоении. Параллельное перенесение. Группа голономии. Гомоморфизмы связностей. Связность в присоединенном расслоении. Форма кривизны. Структурное уравнение связности.**

## **Тема 7. Расслоения струй. Дифференциальные группы высших порядков. Расслоения реперов высших порядков. Расслоения дифференциальногеометрических объектов. Расслоение объекта линейной связности как присоединенное к расслоению реперов второго порядка.**

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету и экзамену:

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. Литература для самостоятельного изучения имеется в библиотеке и в электронном виде.

#### **7.1. Основная литература:**

1. Кобаяси К., Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии. Т. I. М. Наука. 1981. 344 с.
2. Кобаяси К. Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии. Т. II. М. Наука. 1981. 414 с.
3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Проблемы геометрии. Т. 9 М. Наука. 1979. 248 с.
4. Постников М.М. Дифференциальная геометрия. (Лекции по геометрии. Семестр IV) М. Наука. 1988. 496 с.
5. Kolar I., Michor P., Slovák J. Natural operations in differential geometry. Springer. 1993.

#### **7.2. Дополнительная литература:**

1. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М. Мир. 1987. 302 с.
2. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М. Мир. 1970. 412 с.
3. Мищенко А.С. Векторные расслоения. М. Наука. 1984. 207 с.

#### **7.3. Интернет-ресурсы:**

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану**

Освоение дисциплины "Группы Ли и расслоения" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010100.62 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):

Шурыгин В.В. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Фомин В.Е. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.