

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Талорский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Вариационные методы математической физики М1.ДВ.2

Направление подготовки: 010100.68 - Математика

Профиль подготовки: Комплексный анализ

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Галимянов А.Ф.

**Рецензент(ы):**

Уткина Е.А. , Нуриев Наиль Кашапович

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Авхадиев Ф. Г.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 817215415

Казань  
2015

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Галимянов А.Ф. Кафедра теории функций и приближений отделение математики , Anis.Galimjanoff@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины "Вариационные методы математической физики" являются: дать магистрантам качественные знания соответствующих разделов математики, востребованные обществом; создать условия для овладения универсальными и предметно-специализированными компетенциями, способствующими их социальной мобильности и устойчивости на рынке труда; подготовить обучающихся к успешной работе в различных сферах, применяющих математические методы и информационные технологии на основе гармоничного сочетания научной, фундаментальной и профессиональной подготовки кадров; повысить их общую культуру, сформировать социально-личностные качества и развить способности самостоятельно приобретать и применять новые знания и умения. Дисциплина нацелена на подготовку обучающихся к:

- освоению методов решения прикладных задач современной вычислительной математики и математической физики.
- фундаментальному изучению вопросов построения, исследования и применения численных методов решения задач математической физики, составляющих теоретический фундамент для описания и разработки математических моделей объектов различной физической природы;
- научно-исследовательской работе в области информационных технологий и математической физики, связанной с выбором необходимых методов и алгоритмов, используемых в различных технических системах;
- изучению новых научных результатов, научной литературы и непрерывному профессиональному самосовершенствованию.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " М1.ДВ.2 Общенаучный" основной образовательной программы 010100.68 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 3 семестр.

Дисциплина входит в базовую часть общенаучного цикла .Она опирается на теорию математического анализа и линейной алгебры, связана с такими разделами математики, как методы оптимизации, дифференциальное исчисление, служит основой для систематизации и более углубленного изучения прикладной математики и информатики, для проведения научно-исследовательских работ.

Для изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные постановки задач математической физики; численные методы.

Уметь: применять математические методы и вычислительную технику для решения практических задач; программировать на алгоритмических языках, проводить сравнительный анализ результатов.

Владеть: аппаратом математического анализа и линейной алгебры; методами алгоритмизации и программирования; навыками работы в математических пакетах.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-14 (общекультурные)	

компетенции)

владеть одним из иностранных языков на уровне,  
обеспечивающем эффективную профессиональную

## деятельность

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-6 (общекультурные компетенции)	умением логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь
ПК-11 (профессиональные компетенции)	способностью использовать основные методы финансового менеджмента для стоимостной оценки активов, управления оборотным капиталом, принятия решений по финансированию, формированию дивидендной политики и структуре капитала
ПК-15 (профессиональные компетенции)	готовностью участвовать в разработке стратегии организации, используя инструментарий стратегического менеджмента
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способностью к анализу и проектированию межличностных, групповых и организационных коммуникаций

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

Основные приемы работы с современными проблемами прикладной математики и информатики, а также способы анализа полученной информации.

2. должен уметь:

Практически реализовывать изученные алгоритмы, а также при необходимости модифицировать их.

3. должен владеть:

навыками работы с уже написанным программным обеспечением, знать его преимущества и недостатки.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

обобщать и ставить задачи вариационного исчисления в случае зависимости функционала от многих функций, либо от функций и некоторого количества их производных, либо от функций многих переменных

использовать в расчётах численные методы Рунге, ортогональных рядов, Бунднера- Галёркина, наименьших квадратов; ставить и решать задачи линейного программирования.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет зачетных(ые) единиц(ы) 72 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 3 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

- 86 баллов и более - "отлично" (отл.);  
 71-85 баллов - "хорошо" (хор.);  
 55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);  
 54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Введение в теорию вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	3	1-2	2	2	0	
2.	Тема 2. Схемы алгоритмов. Метод Рунге	3	3-4	2	2	0	
3.	Тема 3. Метод Буняковского-Галеркина. Проекционный метод в гильбертовом пространстве	3	5-6	2	2	0	
4.	Тема 4. Выбор базисных функций	3	7-8	2	2	0	
5.	Тема 5. Аппроксимация финитными функциями	3	9-10	2	6	0	
6.	Тема 6. Проекционно-сеточные алгоритмы для задач теории переноса	3	14-16	2	2	0	контрольная работа
7.	Тема 7. Построение проекционно-сеточных схем для задач математической физики	3	17-18	4	4	0	контрольная работа
	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	зачет
	Итого			16	20	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

##### Тема 1. Введение в теорию вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

###### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Функционал Эйлера. Уравнение Эйлера. Вариационная задача. Методы решения.

###### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Построение уравнения Эйлера и соответствующего минимизирующего функционала.

##### Тема 2. Схемы алгоритмов. Метод Рунге

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Классический метод Ритца. Теорема существования и единственности. Метод Ритца в энергетических пространствах. теорема сходимости.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Приближенное решение интегральных и дифференциальных уравнений методом Ритца с заданными коэффициентами

**Тема 3. Метод Бубнова-Галеркина. Проекционный метод в гильбертовом пространстве**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Метод Бубнова-Галеркина. Метод наименьших квадратов. Обобщенный метод наименьших квадратов. Обобщенный метод моментов. Проекционный метод в гильбертовом пространстве. Метод Галеркина-Петрова.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Применение методов Бубнова-Галеркина, метода наименьших квадратов и моментов для интегральных и дифференциальных уравнений с заданными коэффициентами

**Тема 4. Выбор базисных функций**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

О выборе базисных функций в обобщенном методе наименьших квадратов. Выбор базисных функций методом Канторовича. Простейшие кусочно-постоянные финитные функции. Кусочно-линейные базисные функции в одномерном случае. Кусочно-линейная аппроксимация на прямоугольнике и на многоугольной области. Билинейные базисные функции. Понятие о кусочно-полиномиальной аппроксимации высокой степени.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Применение методов моментов и наименьших квадратов, выбирая в качестве базисных функций сплайнов первого и нулевого порядков для уравнений с заданными коэффициентами

**Тема 5. Аппроксимация финитными функциями**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

В-сплайны и их связь с аппроксимирующими функциями. Эрмитово пространство.

**практическое занятие (6 часа(ов)):**

Аппроксимация функций сплайнами нулевого, первого и третьего порядков.

**Тема 6. Проекционно-сеточные алгоритмы для задач теории переноса**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Формулировка, симметризация задач и свойства решений. Методы Ритца, Бубнова-Галеркина и метод наименьших квадратов.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Приближенное решение задач теории переноса с заданными коэффициентами при помощи проекционно-сеточных алгоритмов.

**Тема 7. Построение проекционно-сеточных схем для задач математической физики**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Построение проекционно-сеточной схемы для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Решение третьей краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Решение второй краевой задачи. Решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка. Решение гиперболического уравнения. Численное решение интегральных уравнений.

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Приближенное решение дифференциальных и интегральных уравнений с заданными коэффициентами при помощи прямых методов.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**



N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Введение в теорию вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	3	1-2	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
2.	Тема 2. Схемы алгоритмов. Метод Рунге	3	3-4	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
3.	Тема 3. Метод Буняковского-Галеркина. Проекционный метод в гильбертовом пространстве	3	5-6	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
4.	Тема 4. Выбор базисных функций	3	7-8	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
5.	Тема 5. Аппроксимация финитными функциями	3	9-10	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
6.	Тема 6. Проекционно-сеточные алгоритмы для задач теории переноса	3	14-16	подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
				подготовка к отчету Решение предложенных уравнений	4	отчет
7.	Тема 7. Построение проекционно-сеточных схем для задач математической физики	3	17-18	подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
				подготовка к отчету Решение предложенных уравнений	4	отчет
Итого					36	

### 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Для проведения лекций используется проектор. Практические занятия проводятся в компьютерном классе. Для промежуточной аттестации используется компьютерное тестирование.

### 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

#### Тема 1. Введение в теорию вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

домашнее задание , примерные вопросы:

Составление и решение конкретной оптимизационной задачи для данных функций.

#### Тема 2. Схемы алгоритмов. Метод Рунге

домашнее задание , примерные вопросы:

Применение метода Рунге для данных уравнений. Доказательство сходимости.

### **Тема 3. Метод Бубнова-Галеркина. Проекционный метод в гильбертовом пространстве**

домашнее задание , примерные вопросы:

Применение метода Бубнова-Галеркина для данных уравнений. Доказательство сходимости.

### **Тема 4. Выбор базисных функций**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задачи на выбор базисных сплайнов для данной конкретной задачи

### **Тема 5. Аппроксимация финитными функциями**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задачи на выбор базисных сплайнов для данной конкретной задачи

### **Тема 6. Проекционно-сеточные алгоритмы для задач теории переноса**

контрольная работа , примерные вопросы:

Решение уравнений с заданными коэффициентами проекционно-сеточными алгоритмами

отчет , примерные вопросы:

Приближенное решение уравнений переноса проекционно-сеточными методами

### **Тема 7. Построение проекционно-сеточных схем для задач математической физики**

контрольная работа , примерные вопросы:

Решение уравнений Дирихле проекционно-сеточными методами

отчет , примерные вопросы:

Приближенное решение уравнений с заданными коэффициентами проекционно-сеточными методами

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету:

Контроль качества подготовки осуществляется путем

проверки теоретических знаний и практических

навыков путем:

1) промежуточных отчетов

2) зачета в конце семестра. Зачет проводится в смешанной форме: предлагается решение конкретной задачи, обычно в форме построения приближенного метода и доказательства сходимости, а также тестирования. Банк тестов приводится в приложении.

Вопросы для зачета

1. Введение в теорию вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

2. Схемы алгоритмов. Метод Рунге

3. Метод Бубнова-Галеркина. Проекционный метод в гильбертовом пространстве

4. Выбор базисных функций

5. Аппроксимация финитными функциями

6. Проекционно-сеточные алгоритмы для задач теории переноса

7. Построение проекционно-сеточных схем для задач математической физики

#### **7.1. Основная литература:**

Функциональный анализ, Луговая, Галина Дмитриевна;Шерстнев, Анатолий Николаевич, 2008г.

Функциональный анализ, Сидоров, Анатолий Михайлович, 2010г.

Введение в численные методы, Глазырина, Людмила Леонидовна;Карчевский, Михаил Мионович, 2012г.

Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства, Коннов, Игорь Васильевич, 2013г.

Численные методы. Основы научных вычислений, Зализняк, Виктор Евгеньевич, 2012г.  
Гюнтер Н.М..Курс вариационного исчисления/Гюнтер Н.М. - Санкт-Петербург: Лань, 2009.?320 с. <http://e.lanbook.com/view/book/119/>  
Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Электронный ресурс] / В.К. Романко. ? 3-е изд. (эл.). ? М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. ? 344 с. : ил. ? (Технический университет). [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=42609](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=42609)  
Проекционные итерационные методы решения уравнений и вариационных неравенств с нелинейными операторами теории монотон. операторов: Моногр./ А.А. Фонарёв. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 202 с.: 60x88 1/16. <http://znanium.com/bookread.php?book=445170>

## 7.2. Дополнительная литература:

Математическое и компьютерное моделирование, Тарасевич, Юрий Юрьевич, 2012г.  
Моделирование систем, Артюхин, Георгий Алексеевич, 2012г.  
Методы оптимизации, Ч. 2. Численные методы решения экстремальных задач, , 2011г.  
Численные методы, Слабнов, Виктор Дмитриевич, 2012г.  
Лекции по численным методам математической физики: Учебное пособие / М.В. Абакумов, А.В. Гулин; МГУ им. М.В. Ломоносова - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 158 с.: 60x88 1/16. <http://znanium.com/bookread.php?book=364601>  
Калиткин, Н. Н. Численные методы: учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. ? 2-е изд., исправленное. ? СПб.: БХВ-Петербург, 2011. ? 586 с.: ил. ? (Учебная литература для вузов). - ISBN 978-5-9775-0500-0. <http://znanium.com/bookread.php?book=350803>

## 7.3. Интернет-ресурсы:

Библиотека по математике - <http://mathemlib.ru/mathenc/item/f00/s01/e0001614/index.shtml>  
единое окно образовательных ресурсов - <http://window.edu.ru/resource/650/75650>  
книги по численным методам - [http://www.ph4s.ru/book\\_pc\\_chisl.html](http://www.ph4s.ru/book_pc_chisl.html)  
научная библиотека - [http://edu.sernam.ru/book\\_rs.php?id=119](http://edu.sernam.ru/book_rs.php?id=119)  
универсальный портал - <http://www.exponenta.ru/>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Вариационные методы математической физики" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Компьютерный класс.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010100.68 "Математика" и магистерской программе Комплексный анализ .

Автор(ы):

Галимянов А.Ф. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Уткина Е.А. \_\_\_\_\_

Нуриев Наиль Кашапович \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.