

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ
проф. Таюрский Д.А.

"__" _____ 20__ г.

Программа дисциплины

Гладкие многообразия и группы Ли

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2019

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
 - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
 - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Иваньшин П.Н. (Кафедра геометрии, отделение математики), Pyotr.Ivanshin@kpfu.ru

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен демонстрировать способность и готовность:

Решать основные задачи по теории групп и алгебр Ли. Например, строить алгебру по группе, находить инфинитезимальный базис. Также необходимо уметь применять полученные знания к решению сопутствующих задач, например, к построению диаграмм Дынкина.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.09.08 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.01 "Математика (Общий профиль)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 4 курсе в 8 семестре.

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) на 108 часа(ов).

Контактная работа - 40 часа(ов), в том числе лекции - 20 часа(ов), практические занятия - 20 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 32 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 8 семестре.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Матричные и классические группы	8	2	2	0	6
2.	Тема 2. Топология классических групп	8	2	2	0	6
3.	Тема 3. Универсальная накрывающая группа	8	2	2	0	6
4.	Тема 4. Простые группы Ли	8	2	2	0	4
5.	Тема 5. Алгебра Ли группы Ли	8	2	2	0	6
6.	Тема 6. Локальная и глобальная дифференцируемость группы Ли.	8	2	2	0	4
7.	Тема 7. Представления групп Ли	8	2	2	0	0
8.	Тема 8. Действия групп Ли	8	2	2	0	0
9.	Тема 9. Спецфункции	8	2	2	0	0

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
10.	Тема 10. Группы Ли и дифференциальные уравнения	8	2	2	0	0
	Итого		20	20	0	32

4.2 Содержание дисциплины (модуля)

Тема 1. Матричные и классические группы

Примеры основных групп. Полупрямое произведение. Кватернионы. Матричные группы. Линейные, унитарные, ортогональные и симплектические группы. Векторные пространства и алгебры Матрицы. Детерминант и пфаффиан. Матричные группы и группы линейных преобразований GL и SL. Матричные группы, связанные с билинейными и эрмитовыми

формами. Матричные группы O, Sp и U типов.

Тема 2. Топология классических групп

Процесс Грама-Шмидта. Матричное экспоненциальное отображение. Лево-инвариантное векторное поле. Полярное разложение. Понятие отображения. Гомоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма. Точные последовательности. Группы преобразований. Линейные неоднородные группы. Полупрямое произведение групп. Конформные группы $\text{Conf}(\mathbb{R}^p; q)$.

Тема 3. Универсальная накрывающая группа

Примеры топологических групп. Группа компонент. Универсальная накрывающая группа. Основные определения и элементарные свойства топологической группы.

Окрестности точек в топологической группе.

Свойства подмножеств в топологической группе.

Аксиомы отделимости в топологической группе.

Метод топологизации групп.

Метод построения отделимых групповых топологий на счетной группе.

Подгруппы топологических групп.

Гомоморфизмы и факторгруппа топологической группы.

Произведение топологических групп.

Полные топологические группы и их свойства.

Пополнение топологических групп.

Решетки групповых топологий.

Тема 4. Простые группы Ли

Спинорная группа. Форма Киллинга. Клиффордовы алгебры. Максимальный тор. Полярное разложение матриц. Разложение Картана для связной компоненты единицы

общей (специальной) линейной группы. Теорема Шевалле для алгебраических подгрупп

$GL(n, \mathbb{R})$, замкнутых относительно транспонирования матриц. Комплексификация вещественной алгебры Ли.

Овеществление и вещественные формы

комплексной алгебры Ли. Компактные и некомпактные вещественные формы,

унитарный трюк Вейля.

Тема 5. Алгебра Ли группы Ли

Однопараметрическая подгруппа. Единственность однопараметрической подгруппы. Канонические координаты.

Дифференцируемость классического гомоморфизма. Фактор-группы. Присоединенное представление группы Ли. Стандартные торы для унитарных и ортогональных

групп. Ранг компактной группы Ли и ее алгебры Ли. Доказательство теоремы о накры-

тии при помощи теоремы Лефшеца о неподвижной точке непрерывного отображения

(теорема Лефшеца без доказательства).

Тема 6. Локальная и глобальная дифференцируемость группы Ли.

Формула Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа. Нильпотентные группы и алгебры Ли. Алгебра Гейзенберга.

Несвязные группы Ли. Полупрямое произведение дискретной группы автоморфизмов

связной группы Ли и ее самой. Группа путей в связной группе Ли, инвариантная

подгруппа замкнутых путей. Построение односвязной группы Ли

универсальной

накрывающей группы. Связная группа Ли как факторгруппа универсальной накрывающей группы по дискретной центральной подгруппе. Теорема о монодромии (единственность продолжения локального гомоморфизма на всю односвязную группу) и единственность универсальной накрывающей группы с точностью до изоморфизма.

Тема 7. Представления групп Ли

Теорема Риза-Фишера. Неприводимость представления. Тензорное произведение представлений. Лемма Шура. Интегрирование, мера Хаара. Унитарный трюк Вейля. Ортогональность. Компактные группы Ли. Вещественные и комплексные пред-

ставления. Комплексно сопряженные представления. Унитарные представления. Полная приводимость конечномерных унитарных представлений. Присоединенное представление матричной группы Ли (присоединенная группа), отсутствие

центра у присоединенной группы. Присоединенное представление алгебры Ли (алгебра внутренних дифференцирований). Структурные константы как матрицы присоединенного представления базисных векторов алгебры Ли. Точность нетривиальных конечномерных представлений простых алгебр Ли. Нетривиальные конечномерные представления простых групп Ли и дискретные центральные подгруппы.

Тема 8. Действия групп Ли

Группа изотропии. Фундаментальные теоремы Ли. Инварианты. k -точечные инварианты. Группы Ли, калибровочные симметрии и калибровочные поля. Почему калибровочные поля лежат в алгебре Ли. Унитарные представления и квантовая теория.

Представление алгебры Ли в алгебре линейных дифференциальных операторов.

Пример: алгебра $so(3)$ и квантово-механический оператор момента количества движения. Представление алгебры Ли в алгебре бозонных и фермионных операторов рождения и уничтожения.

Тема 9. Спецфункции

Универсальная обертывающая алгебра. Оператор Казимира. Группа $SO(3)$. Сферические гармоники и полиномы Лежандра. Евклидова группа плоскости и функции Бесселя. Одномерность комплексных неприводимых представлений абелевых групп и алгебр Ли.

Эквивалентность утверждений: всякое комплексное неприводимое представление одномерно все матрицы конечномерного комплексного представления имеют общий собственный вектор

все матрицы конечномерного комплексного представления одновременно приводятся к треугольному виду. Теорема Ли о комплексных конечномерных представлениях разрешимых групп и алгебр Ли. Доказательство в групповом варианте. Нильпотентность матриц присоединенного представления нильпотентной алгебры Ли. Теорема Энгеля.

Тема 10. Группы Ли и дифференциальные уравнения

ОДУ первого порядка. Поток векторного поля. Уравнения в частных производных. Пример: уравнение теплопроводности. Диаграммы Дынкина. Связные диаграммы Дынкина и их классификация. Четыре бесконечные серии и пять исключительных диаграмм Дынкина. Эквивалентные диаграммы Дынкина и изоморфизм алгебр малых размерностей, принадлежащих к разным сериям.

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Алгебры Ли, представления. - http://qft.itp.ac.ru/mbersht/Group/2014/090_Lect.pdf

Введение в теорию алгебр Ли и их представлений -

http://www.vixri.com/d/Xamfris%20Dzh.%20_Vvedenie%20v%20teoriju%20algebr%20Li%20i%20ix%20predstavlenij.%20.pdf

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ - <http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/lie.pdf>

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Необходимо последовательно изложить как основы теории многообразий, так и теорию групп. Основой для лекций следует считать монографию Непрерывные группы, Понтрягин. Классическая книга до сих пор не устарела, о чем свидетельствуют регулярные переиздания, в том числе и за рубежом. При чтении лекций нужно обязательно отметить связь с теорией решений дифференциальных уравнений.

Вид работ	Методические рекомендации
практические занятия	Необходимо тщательно подходить к подбору задач для разбора и самостоятельного решения. Начинать следует с простых алгебраических примеров на структуру матричных групп Ли. Обязательно дать разнообразные задачи на представления групп, как матричные, так и спинорные, важные для теоретической физики.
самостоятельная работа	В качестве самостоятельной работы студент должен изучать дополнительную литературу. Например, ознакомиться с классической теоремой теории алгебр Ли --- Теоремой Адо. Также можно изучить и сравнить различные подходы к построению групп симметрий решений дифференциальных уравнений в частных производных.
экзамен	На экзамене необходимо не только требовать знания теории, но решения задач, особенно имеющих отношение к применению теории к смежным областям математики. Поскольку спецкурс предназначен для студентов математиков, специализирующихся в дисциплинах математический анализ и геометрия, задачи можно иллюстрировать приложением к решению дифференциальных уравнений.

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи;
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;

- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки "Общий профиль".

Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2019

Основная литература:

1. Корешков, Н. А. Конечномерные алгебры [Текст: электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Н. А. Корешков, С. М. Скрябин ; Казан. федер. ун-т, Ин-т математики и механики им. Н. И. Лобачевского . - Электронные данные (1 файл: 0,634 Мб) . - (Казань : Казанский федеральный университет, 2014) . - Загл. с экрана . - Для 6-го семестра . - Режим доступа: только для студентов и сотрудников КФУ. Оригинал копии: Конечномерные алгебры : учебно-методическое пособие / Н. А. Корешков, С. М. Скрябин . - Казань : [Казанский университет], 2014 . - 55 с. - URL: http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_035_A5-000542.pdf
2. Корешков, Н. А. Алгебры Ли и ассоциативные алгебры [Текст : электронный ресурс]: учебное пособие / Н. А. Корешков, С. М. Скрябин ; Казан. гос. ун-т .- Электронные данные (1 файл: 0,29 Мб) .- (Казань : Казанский федеральный университет, 2014) .- Загл. с экрана .- Режим доступа: открытый. Оригинал копии: Алгебры Ли и ассоциативные алгебры : учебное пособие / Н. А. Корешков, С. М. Скрябин ; Казан. гос. ун-т .- Казань : Казан. гос. ун-т, 2007 .- 24 с. - URL: <http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-767489.pdf>
3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры : учебник / А.Г. Курош. - 20-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2019. - 432 с. - ISBN 978-5-8114-4304-8.- Текст: электронный// Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/118617>

Дополнительная литература:

1. Султанбеков, Ф. Ф. От решёток к булевым алгебрам [Текст: электронный ресурс]: учебное пособие / Ф. Ф. Султанбеков ; Казан. федер. ун-т .- Электронные данные (1 файл: 0,66 Мб) .- (Казань : Казанский федеральный университет, 2012) .- Загл. с экрана .- Режим доступа: открытый .- URL:http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2012_000032.pdf
2. Желобенко, Д.П. Компактные группы Ли и их представления: учебное пособие / Д.П. Желобенко. - 2-е изд., доп. - Москва: МЦНМО, 2007. - 552 с. - ISBN 978-5-94057-302-9.- Текст: электронный// Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9335>

Приложение 3
к рабочей программе дисциплины (модуля)
Б1.В.ДВ.09.08 Гладкие многообразия и группы Ли

Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2019

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows