

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Д.А. Таюрский

"\_\_\_" 20\_\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Вариационные краевые задачи с неизвестными границами

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2019

## **Содержание**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Елизаров А.М. (Кафедра программной инженерии, Высшая школа информационных технологий и интеллектуальных систем), aelizarov@kpfu.ru ; доцент, к.н. Насрутдинов М.Ф. (кафедра компьютерной математики и информатики, отделение педагогического образования), Marat.Nasrutdinov@kpfu.ru

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2	Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

знать основные понятия и методы при решении вариационных краевых задач

Должен уметь:

применять теоретические знания для решения задач

Должен владеть:

уметь анализировать применимость методов для решения задач

Должен демонстрировать способность и готовность:

Спецкурс дает слушателям представление о современном состоянии теории и приложений вариационных краевых задач с неизвестными границами и, в частности, с тем направлением развития этой теории, которое связано с обратными краевыми задачами аэрогидродинамики.

Студент должен знать постановки и методы решения вариационных краевых задач с неизвестными границами, уметь ориентироваться в научной литературе по предлагаемой тематике, владеть теоретическими знаниями о вариационных краевых задачах аэрогидродинамики и решать простейшие вариационные краевые задачи со свободными границами

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.09.07 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.01 "Математика (Математика в цифровой экономике)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 4 курсе в 8 семестре.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) на 108 часа(ов).

Контактная работа - 40 часа(ов), в том числе лекции - 20 часа(ов), практические занятия - 20 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 32 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 8 семестре.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Классификация краевых					
Страница 3 из 10.						

задач. Математические модели течений и краевые задачи

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
2.	Тема 2. Обратные краевые задачи для аналитических функций и теория квазирешений	8	6	6	0	12
3.	Тема 3. Вариационные обратные краевые задачи	8	8	8	0	12
	Итого		20	20	0	32

#### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

##### Тема 1. Классификация краевых задач. Математические модели течений и краевые задачи

Прямые краевые задачи; задача Шварца; краевые задачи с неизвестными (свободными) границами; переход к вариационным обратным краевым задачам. Физические представления. Плоское поле и комплексный потенциал Простейшие модели течений. Постановки краевых задач для комплексного потенциала. Формула Чаплыгина; поступат Жуковского-Чаплыгина; метод особых точек Чаплыгина. Модель идеальной несжимаемой жидкости, постановка краевых задач. Учет сжимаемости потока при дозвуковом течении. Учет вязкости в приближении пограничного слоя. Экстремальные задачи теории струй. Схема Жуковского-Рошко-Эплера; дуга максимального сопротивления.

##### Тема 2. Обратные краевые задачи для аналитических функций и теория квазирешений

Постановки внутренней и внешней обратных краевых задач (ОКЗ) для аналитических функций, существование и единственность решения, условия разрешимости. Теория квазирешений внешних ОКЗ.

Постановка основной обратной краевой задачи аэрогидродинамики (ОКЗА), условия разрешимости и способы их удовлетворения. Квазирешения ОКЗА. Вариационные методы в задаче о квазирешениях. Примеры квазирешений.

Оптимальные гидродинамически целесообразные распределения скорости в ОКЗА. Оптимальные гидродинамически целесообразные распределения фильтрационных характеристик

##### Тема 3. Вариационные обратные краевые задачи

Постановки вариационных ОКЗ. Теоремы существования и единственности решений. Сведение к оптимизационным задачам и способы нахождения оптимизированных решений. Точные оценки в вариационных задачах.

Вариационные ОКЗ теории фильтрации: постановка задач, сведение к оптимизационным задачам, существование и единственность решения. Оптимизация фильтрационных течений под телом плотины, в каналах, дренажах и почвенных массивах.

Вариационные ОКЗА: постановка задач, сведение к оптимизационным задачам, существование и единственность решения.

Экстремальные задачи теории струй.

#### 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996н/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;
- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС З++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Пособия кафедры прикладной математики КФУ - <http://kpm.ksu.ru/docs.php>

Численные методы и программирование - <http://znanium.com/bookread.php?book=370603>

Элементы вариационного исчисления - <http://vi.horizontalru.com/17.html>

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Студентам необходимо посещать лекции и вести конспект лекций вслед за изложением материала преподавателем. Рекомендуется прорабатывать конспект в течение дня после лекции и просматривать его вновь накануне следующей лекции. В случае обнаружения ошибок или возникновения вопросов по предыдущему материалу необходимо обратиться к преподавателю.

Вид работ	Методические рекомендации
практические занятия	Подготовку к семинарам (практическим занятиям, лабораторным занятиям) следует начинать с изучения теоретической части (лекционного материала) с определениями основных понятий, выводом формул и доказательством теорем. Особое внимание следует обращать на определения основных понятий и формулировки основных теорем. Необходимо подробно разбирать примеры, которые поясняют определения и теоремы. При разборе теорем необходимо учитывать, что все предположения теоремы должны использоваться в доказательстве ее утверждения, при этом необходимо понимать, в каком месте доказательства используется то или иное предположение теоремы.
самостоятельная работа	Самостоятельная работа студентов состоит из двух основных частей - проработка лекционного материала и выполнения домашних заданий. Для освоения теоретического и практического материала, в случае, когда конспектов оказывается недостаточным, или для более детальной проработки отдельных тем рекомендуется использовать литературу, указанную в соответствующем разделе. Все возникающие вопросы рекомендуется заранее четко сформулировать и впоследствии обсудить с преподавателем.
экзамен	Экзамен нацелен на комплексную проверку освоения дисциплины. Экзамен проводится в устной или письменной форме по билетам, в которых содержатся вопросы (задания) по всем темам курса. Обучающемуся даётся время на подготовку. Оценивается владение материалом, его системное освоение, способность применять нужные знания, навыки и умения при анализе проблемных ситуаций и решении практических заданий.

#### **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

#### **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

Компьютерный класс.

#### **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;

- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи;
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки "Математика в цифровой экономике".

**Приложение 2**  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.09.07 Вариационные краевые задачи с  
неизвестными границами

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2019

**Основная литература:**

1. Зализняк, В. Е. Теория и практика по вычислительной математике : учебное пособие / В. Е. Зализняк, Г. И. Щепановская. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2012. - 174 с. - ISBN 978-5-7638-2498-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/441232> (дата обращения: 12.03.2020). - Режим доступа: по подписке.

2. Елизаров А.М. Краевые задачи механики жидкости и газа: учебное пособие / А. М. Елизаров; Казан. (Приволж.) федер. ун-т, Ин-т математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Каф. аэрогидромеханики.-Электронные данные (1 файл: 2,21 Мб). - Казань: Казанский федеральный университет, 2013. - 225 с. - Текст : электронный. - URL: [http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/21427/05\\_038\\_000450.pdf](http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/21427/05_038_000450.pdf) (дата обращения: 12.03.2020). - Режим доступа: открытый.

3. Елизаров, А. М. Задачи оптимизации формы в аэрогидродинамике : учебное пособие / А. М. Елизаров, А. Р. Касимов, Д. В. Маклаков. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 480 с. - ISBN 978-5-9221-0999-4. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2730> (дата обращения: 12.03.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

**Дополнительная литература:**

1. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. - Москва : ИД 'ФОРУМ' : ИНФРА-М, 2019. - 336 с. - (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0779-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1003943> (дата обращения: 12.03.2020). - Режим доступа: по подписке.

2. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учебное пособие / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. - 4-е изд., перераб. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 312 с. - ISBN 5-9221-0264-8. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2763> (дата обращения: 12.03.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной : учебник / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов ; под редакцией В. А. Ильина. - 6-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 336 с. - ISBN 978-5-9221-0133-2. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/48167> (дата обращения: 12.03.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.09.07 Вариационные краевые задачи с  
неизвестными границами

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая  
перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Математика в цифровой экономике

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2019

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "Консультант студента", доступ к которой предоставлен обучающимся. Многопрофильный образовательный ресурс "Консультант студента" является электронной библиотечной системой (ЭБС), предоставляющей доступ через сеть Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретенным на основании прямых договоров с правообладателями. Полностью соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования к комплектованию библиотек, в том числе электронных, в части формирования фондов основной и дополнительной литературы.