

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Минзарипов Р.Г.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Геометрическая теория функций М2.В.3

Направление подготовки: 010100.68 - Математика

Профиль подготовки: Теория функций и информационные технологии

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Авхадиев Ф.Г.

**Рецензент(ы):**

Шабалин П.Л.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Авхадиев Ф. Г.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2013

## **Содержание**

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Авхадиев Ф.Г. Кафедра теории функций и приближений отделение математики, Farit.Avhadiev@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) "Геометрическая теория функций" является: изучение основных результатов и методов теории конформных и квазиконформных отображений и некоторых их приложений к прикладным задачам математической физики. Курс обязательно должен сопровождаться практическими занятиями, в которых студенты обязаны решить определенное количество задач, используя известные методы. В результате выпускник должен уметь решать определенный набор задач с использованием изученных методов комплексного анализа и предметно представлять диапазон применения методов геометрической теории функций.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "М2.В.3 Профессиональный" основной образовательной программы 010100.68 Математика и относится к вариативной части. Осваивается на 1 курсе, 1 семестр.

Дисциплина входит в базовую часть по магистерской программе "Теория функций и информационные технологии". Для изучения и освоения дисциплины нужны первоначальные знания из курсов математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики и функционального анализа. Знания и умения, приобретенные студентами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при самостоятельном освоении современных результатов по геометрическому анализу, при выполнении самостоятельных научных работ, при решении конкретных задач из механики, физики и т.п.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-3 (общекультурные компетенции)	Активная социальная мобильность, способность работать в международной среде
ПК-10 (профессиональные компетенции)	Определение общих форм, закономерностей, инструментальных средств для групп дисциплин
ПК-13 (профессиональные компетенции)	Способность к управлению и руководству научной работой коллективов
ПК-4 (профессиональные компетенции)	Самостоятельный анализ физических аспектов в классических постановках математических проблем
ПК-6 (профессиональные компетенции)	Самостоятельное построение целостной картины дисциплины
ПК-8 (профессиональные компетенции)	Собственное видение прикладного аспекта в строгих математических формулировках

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные результаты и методы теории конформных и квазиконформных отображений, иметь представление о существующих приложениях методов геометрической теории функций к прикладным задачам

2. должен уметь:

решать определенный набор задач с использованием изученных методов комплексного анализа

3. должен владеть:

методами сравнения эвклидовых и конформных характеристик областей

Применения комплексных методов к решению задач реального анализа и математической физики

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 1 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Теоремы Римана и Пуанкаре о конформных отображениях и их применения.	1	1	2	4	0	домашнее задание
2.	Тема 2. Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского. Принцип гиперболической метрики .	1	2	2	4	0	домашнее задание
3.	Тема 3. Теоремы площадей и их применения. Классическое изопериметрическое неравенство.	1	3	2	4	0	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
4.	Тема 4. Проблема Бибераха и ее аналоги в подклассах однолистных функций	1	4	2	4	0	домашнее задание
5.	Тема 5. Теория Левнера	1	5	2	4	0	домашнее задание
6.	Тема 6. Теоремы Литтлвуда и Рогозинского о подчиненных функциях	1	6	2	4	0	домашнее задание
7.	Тема 7. Методы симметризации и их применения.	1	7	2	4	0	устный опрос
8.	Тема 8. Метод конформных отображений в задачах математической физики.	1	8	2	4	0	домашнее задание
9.	Тема 9. Квазиконформные отображения.	1	9	2	4	0	устный опрос
	Тема . Итоговая форма контроля	1		0	0	0	экзамен
	Итого			18	36	0	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Теоремы Римана и Пуанкаре о конформных отображениях и их применения.

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Точные формулировки теорем о существовании и единственности конформных отображений для односвязных и многосвязных областей

#### **практическое занятие (4 часа(ов)):**

Решение задач на конформные отображения с применением известных функций

### Тема 2. Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского. Принцип гиперболической метрики .

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

О моделях геометрии Лобачевского и подробное описание модели Пуанкаре в круге и полуплоскости. Определение плотности метрики и конформного радиуса. Доказательство принципа гиперболической метрики

#### **практическое занятие (4 часа(ов)):**

Аналитические и геометрические задачи и упражнения для освоения метрики Пуанкаре и геометрии Лобачевского

### Тема 3. Теоремы площадей и их применения. Классическое изопериметрическое неравенство.

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Внешняя теорема площадей Гронуолла. Классическое изопериметрическое неравенство и его доказательство методом Гурвица

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Решение задач по теме

**Тема 4. Проблема Бибербаха и ее аналоги в подклассах однолистных функций**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Постановка задачи о точных оценках коэффициентов в различных классах однолистных отображений круга. Доказательство теорем Бибербаха для общего класса и Левнера для отображений круга на выпуклые области

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Решение задач по оценкам коэффициентов

**Тема 5. Теория Левнера**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Параметрическое описание однолистных функций с помощью решений дифференциального уравнения Левнера и применения

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Решение задач по теме, знакомство со вложенными цепями голоморфных функций

**Тема 6. Теоремы Литтлвуда и Рогозинского о подчиненных функциях**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Подчиненные голоморфные функции, доказательства теорем Литтлвуда и Рогозинского для подчиненных функций

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Применения подчиненных функций к точным оценкам коэффициентов

**Тема 7. Методы симметризации и их применения.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Симметризация по Штейнеру и круговая симметризация Шварца, их базовые применения

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Решение задач с применением методов симметризации

**Тема 8. Метод конформных отображений в задачах математической физики.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Конформная "пересадка" краевых задач. Обратная краевая задача теории крыла

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Решение задач на конформную замену переменных для интегралов и дифференциальных уравнений на плоскости

**Тема 9. Квазиконформные отображения.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Уравнение Бельтрами и квазиконформные отображения плоских областей. Теорема Мебиуса и пространственные квазиконформные отображения

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Решение задач по квазиконформным отображениям областей на плоскости

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Теоремы Римана и Пуанкаре о конформных					
Регистрационный номер 8172						

отображениях и их применения.

1

1

подготовка  
домашнего

задания

2

домашнее  
задание



N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
2.	Тема 2. Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского. Принцип гиперболической метрики .	1	2	подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
3.	Тема 3. Теоремы площадей и их применения. Классическое изопериметрическое неравенство.	1	3	подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
4.	Тема 4. Проблема Бибербаха и ее аналоги в подклассах однолистных функций	1	4	подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
5.	Тема 5. Теория Левнера	1	5	подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
6.	Тема 6. Теоремы Литтлвуда и Рогозинского о подчиненных функциях	1	6	подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
7.	Тема 7. Методы симметризации и их применения.	1	7	подготовка к устному опросу	2	устный опрос
8.	Тема 8. Метод конформных отображений в задачах математической физики.	1	8	подготовка домашнего задания	2	домашнее задание
9.	Тема 9. Квазиконформные отображения.	1	9	подготовка к устному опросу	2	устный опрос
	Итого				18	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Сочетание традиционных образовательных технологий в форме лекций и практических занятий по решению конкретных задач известными методами и проведение контрольных мероприятий (экзамена и промежуточных контрольных работ).

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### **Тема 1. Теоремы Римана и Пуанкаре о конформных отображениях и их применения.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Примеры конформных отображений односвязных областей и примеры применения теоремы Пуанкаре в случае отображений круга на двусвязные области

### **Тема 2. Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского. Принцип гиперболической метрики .**

домашнее задание , примерные вопросы:

Конформная инвариантность метрики Пуанкаре. Проверка аксиом геометрии Лобачевского на двух моделях Пуанкаре

### **Тема 3. Теоремы площадей и их применения. Классическое изопериметрическое неравенство.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Геометрический смысл теорем площадей. Равенство Парсеваля для граничных функций. Изопериметрическое неравенство как следствие теоремы Брунна-Минковского

### **Тема 4. Проблема Бибераха и ее аналоги в подклассах однолистных функций**

домашнее задание , примерные вопросы:

Повторить лемму Шварца и ее применения

### **Тема 5. Теория Левнера**

домашнее задание , примерные вопросы:

Класс Каратеодори -- голоморфные в круге функции с положительной реальной частью. Оценки в этом классе

### **Тема 6. Теоремы Литтлвуда и Рогозинского о подчиненных функциях**

домашнее задание , примерные вопросы:

Оценки коэффициентов для отображений круга на выпуклую область и на область с выпуклым дополнением

### **Тема 7. Методы симметризации и их применения.**

устный опрос , примерные вопросы:

Сравнение симметризаций для многоугольников, выпуклых и невыпуклых тел

### **Тема 8. Метод конформных отображений в задачах математической физики.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Конформная инвариантность оператора Шварца. Конформно инвариантные интегральные неравенства

### **Тема 9. Квазиконформные отображения.**

устный опрос , примерные вопросы:

Задача о квазиконформных отображениях 4-угольников

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

Контроль качества подготовки осуществляется путем проверки теоретических знаний и практических навыков путем

- 1) промежуточных контрольных работ
- 2) экзамена в конце семестра.

#### **7.1. Основная литература:**

1. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. изд-во Наука, 1966.
2. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М. Наука. 1970.

3. С.Н. Киясов, Ю.В. Обносков, Л.Г. Салехов. Введение в теорию функций комплексного переменного. Примеры и задачи: Методическое пособие. - Казань: КГУ, 2004.

## **7.2. Дополнительная литература:**

1. Ф.Г. Авхадиев. Неравенства для интегральных характеристик областей. Учебное пособие. Казанский университет, 2006
2. И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М. Наука. 1967.
3. А. Курант, Р. Гурвиц. Теория функций. М. Наука. 1968.
4. М.А. Евграфов, К.А. Бежанов и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М. Наука. 1972.
5. F.G. Avkhadiev and K.-J. Wirths. Schwarz-Pick type inequalities. Birkhauser, 2009

## **7.3. Интернет-ресурсы:**

Большая научная библиотека - <http://sci-lib.com/subject.php?subject=1&pp=1>

Википедия Портал:Математика - <http://ru.wikipedia.org/wiki/Портал:Математика>

Научная библиотека имени Н.И. Лобачевского - [http://www.kpfu.ru/main\\_page?p\\_sub=6421](http://www.kpfu.ru/main_page?p_sub=6421)

Общероссийский математический портал Mathnet.ru - <http://mathnet.ru/>

Публичная электронная библиотека - [www.elibrary.ru/](http://www.elibrary.ru/)

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану**

Освоение дисциплины "Геометрическая теория функций" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010100.68 "Математика" и магистерской программе Теория функций и информационные технологии .

Автор(ы):

Авхадиев Ф.Г. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Шабалин П.Л. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Лист согласования

<b>N</b>	<b>ФИО</b>	<b>Согласование</b>
1	Авхадиев Ф. Г.	Согласовано
2	Авхадиев Ф. Г.	Согласовано
3	Насрутдинов М. Ф.	Согласовано
4	Чижанова Е. А.	
5	Соколова Е. А.	
6	Тимофеева О. А.	