

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Д. А. Таюрский

» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

## **Программа дисциплины**

Уравнения математической физики

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Карчевский М.М. (кафедра вычислительной математики, отделение прикладной математики и информатики), mikhail.Karchevsky@kpfu.ru

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1	Готовность к самостоятельной работе
ПК-2	Способность и готовность настраивать и тестировать и осуществлять проверку вычислительной техники

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

такие разделы теории уравнений с частными производными, которые традиционно используются при построении и исследовании математических моделей механики, физики, техники, биологии.

Должен уметь:

применять, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным проблемам.

Должен владеть:

навыками постановок задач из различных областей знаний в виде уравнений в частных производных, приемами анализа и решения основных уравнений математической физики.

Должен демонстрировать способность и готовность:

применять на практике полученные при изучении курса теоретические знания в области задач математической физики и навыки при решении учебно-методических задач и упражнений.

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.Б.15 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.04 "Прикладная математика (Математическое моделирование)" и относится к базовой (общепрофессиональной) части.

Осваивается на 3 курсе в 5, 6 семестрах.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных(ые) единиц(ы) на 288 часа(ов).

Контактная работа - 144 часа(ов), в том числе лекции - 72 часа(ов), практические занятия - 0 часа(ов), лабораторные работы - 72 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 108 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 5 семестре; экзамен в 6 семестре.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.	5	2	0	2	6
2.	Тема 2. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.	5	2	0	2	6
3.	Тема 3. Вывод основных уравнений математической физики: уравнение колебаний струны, уравнение колебаний мембраны, уравнение колебаний стержня, уравнение теплопроводности в твердом теле, уравнение теплопроводности стержня, примеры стационарных уравнений.	5	4	0	4	6
4.	Тема 4. Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Колебания полуограниченной струны.	5	2	0	2	6
5.	Тема 5. Решение однородного уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Анализ решения задачи о свободных колебаниях струны.	5	2	0	2	6
6.	Тема 6. Обоснование метода Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны.	5	2	0	2	6
7.	Тема 7. Метод разделения переменных решения задачи о вынужденных колебаниях струны. Явление резонанса. Метод разделения переменных решения задачи о свободных колебаниях прямоугольной мембраны.	5	2	0	2	6
8.	Тема 8. Теорема единственности решения основных граничных задач для волнового уравнения.	5	2	0	2	6
9.	Тема 9. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.	5	2	0	2	6
10.	Тема 10. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.	5	2	0	2	4
11.	Тема 11. Формула Пуассона решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения (метод спуска)	5	2	0	2	5
12.	Тема 12. Теорема о единственности решения основных краевых задач для уравнения теплопроводности.	5	2	0	2	5

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
13.	Тема 13. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности стержня.	5	2	0	2	5
14.	Тема 14. Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности стержня. Анализ полученного решения. Квазистационарный режим остывания стержня.	5	2	0	2	5
15.	Тема 15. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.	5	2	0	2	4
16.	Тема 16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье.	5	2	0	2	4
17.	Тема 17. Обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.	5	2	0	2	4
18.	Тема 18. Основные граничные задачи для эллиптического уравнения. Исследование единственности решения основных граничных. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности стержня.	6	2	0	2	1
19.	Тема 19. Гармонические функции. Формулы Грина. Основные свойства. Теоремы о среднем для гармонической функции.	6	4	0	4	1
20.	Тема 20. Принцип максимума для гармонической функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление гармонической функции.	6	4	0	4	2
21.	Тема 21. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения.	6	2	0	2	1
22.	Тема 22. Метод функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа: определение функции Грина и ее основные свойства.	6	2	0	2	2
23.	Тема 23. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для шара методом функции Грина (формула Пуассона).	6	4	0	4	1
24.	Тема 24. Поведение гармонической функции и ее производных на бесконечности. Исследование единственности решения внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа.	6	2	0	2	2

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
25.	Тема 25. Метод разделения переменных решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области.	6	2	0	2	1
26.	Тема 26. Метод разделения переменных решения внутренней и внешней задач Дирихле для круга методом разделения переменных. Формула Пуассона.	6	2	0	2	2
27.	Тема 27. Потенциалы простого и двойного слоя, гармонические функции. Геометрические свойства поверхности Ляпунова.	6	4	0	4	1
28.	Тема 28. Прямое значение потенциала двойного слоя. Интеграл Гаусса.	6	2	0	2	1
29.	Тема 29. Предельные значения потенциала двойного слоя.	6	2	0	2	1
30.	Тема 30. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.	6	2	0	2	1
31.	Тема 31. Интегральные уравнения теории потенциала.	6	2	0	2	1
	Итого		72	0	72	108

#### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

##### Тема 1. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные уравнения второго порядка. Виды уравнений. Матричная запись. Правила сложного дифференцирования. Замена переменных в уравнениях второго порядка, матрица коэффициентов при старшей части. Инвариантность формы уравнения при замене переменных. Основная теорема о конгруэнтных симметричных матрицах. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка на основе инерции матрицы старших коэффициентов. Три основных типа уравнений. Примеры линейных уравнений математической физики второго порядка различных типов.

##### Тема 2. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Классификация уравнений с двумя независимыми переменными. Определение типа уравнения по дискриминанту уравнения. Сведение проблемы приведения уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду к решению квазилинейного уравнения первого порядка. Описание способов приведения гиперболических, параболических и эллиптических уравнений к каноническому виду путем решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений . первого порядка. Обоснование невырожденности соответствующих преобразований переменных.

##### Тема 3. Вывод основных уравнений математической физики: уравнение колебаний струны, уравнение колебаний мембраны, уравнение колебаний стержня, уравнение теплопроводности в твердом теле, уравнение теплопроводности стержня, примеры стационарных уравнений.

Основы вывода уравнений математической физики. Гипотезы, физические законы, законы сохранения. Вывод уравнения колебаний струны, стержней, уравнение колебаний мембраны. Начально-краевые задачи для уравнений колебаний. Вывод уравнения теплопроводности в твердом теле, уравнения теплопроводности в стержне. Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Примеры стационарных краевых задач математической физики.



#### **Тема 4. Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Колебания полуограниченной струны.**

Постановка задачи Коши для одномерного уравнения колебаний. Построение общего решения одномерного уравнения. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Постановка начально-краевой задачи о колебаниях полуограниченной струны при различных способах закрепления. Сведение задачи о колебаниях полуограниченной струны к задаче Коши. Физическая интерпретация решений задач о колебаниях неограниченной и полуограниченной струны. Волновые процессы.

#### **Тема 5. Решение однородного уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Анализ решения задачи о свободных колебаниях струны.**

Задачи в ограниченных областях, одномерный случай. Решение однородного уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Построение решения задачи в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля. Интерпретация полученного решения. Стоячие волны. Амплитуда, частота, фаза стоячей волны. Зависимость параметров от исходных данных. Анализ колебаний струны в зависимости от ее физических свойств.

#### **Тема 6. Обоснование метода Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны.**

Обосновывается метод Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны. Исследуется поведение коэффициентов Фурье при возрастании их номера при различных требованиях на исходные данные задачи. Формулируется и доказывается теорема о достаточных условиях существования классического решения задачи для одномерного волнового уравнения. Исследуется асимптотика решения при возрастании времени.

#### **Тема 7. Метод разделения переменных решения задачи о вынужденных колебаниях струны. Явление резонанса. Метод разделения переменных решения задачи о свободных колебаниях прямоугольной мембраны.**

Описание общих способов решения одномерного неоднородного уравнения колебаний струны с неоднородными граничными условиями. Решение неоднородного уравнения колебаний струны с однородными граничными условиями методом разделения переменных. Этот метод применяется для частного случая, когда правая часть представлена в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля. Явления резонанса, анализ причин его появления, механическая интерпретация.

#### **Тема 8. Теорема единственности решения основных граничных задач для волнового уравнения.**

Формулируется теорема о единственности решения смешанной граничной задачи для многомерного гиперболического уравнения дивергентного вида. Рассматривается широкий класс граничных условий, в частности, граничные условия Дирихле. Доказательство теоремы основано на методе энергетических неравенств. Вводится понятие потенциальной, кинетической и полной энергии тела. Указывается на то, что основное энергетическое тождество, полученное в ходе доказательств теоремы, является отражением закона сохранения полной энергии системы в отсутствие внешних сил.

#### **Тема 9. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.**

Рассматривается задача Коши для трехмерного волнового уравнения. Формулируется теорема единственности решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения. Доказательство теоремы основано на понятии характеристического конуса и энергетических тождествах. В ходе доказательства теоремы формируется понятие области зависимости решения от начальных данных. Устанавливается конечность скорости распространения возмущений, описываемых волновым уравнением.

#### **Тема 10. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.**

Решается задача Коши для трехмерного волнового уравнения. Строятся интегральные представления частных решений волнового уравнения, на основе которых выводится формула Кирхгофа (Пуассона) решения задачи Коши для трехмерного однородного волнового уравнения при произвольных начальных условиях. Доказывается конечность скорости распространения возмущений, описываемых решениями однородного волнового уравнения. Формулируется понятия переднего и заднего фронта звуковой волны.

#### **Тема 11. Формула Пуассона решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения (метод спуска)**

Формулируется задача Коши для двумерного волнового уравнения. Формула Пуассона решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения получается методом понижения размерности задачи (методом спуска), т. е. путем тождественных преобразований решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения. Доказывается, что решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения также описывает распространение возмущений с конечной скоростью, обладает передним фронтом, но не имеет заднего фронта волны.

**Тема 12. Теорема о единственности решения основных краевых задач для уравнения теплопроводности.**

Дается постановка смешанной граничной задачи для нестационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Методом энергетических неравенств исследуется единственность решения основных краевых задач для уравнения теплопроводности. При исследовании рассматривается смешанная краевая задача с участками границы с условиями Дирихле, Неймана и третьими граничными условиями. Формулируется и доказывается теорема о единственности решения для произвольного сочетания граничных условий.

**Тема 13. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности стержня.**

Дается постановка первой граничной задачи для одномерного параболического уравнения с постоянными коэффициентами (задачи об остывании однородного стержня, боковая поверхность которого теплоизолирована). Решение однородного уравнения теплопроводности стержня строится методом разделения переменных. Дается физическая интерпретация полученного решения. Вводится и анализируется понятие квазистационарного режима остывания стержня.

**Тема 14. Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности стержня. Анализ полученного решения. Квазистационарный режим остывания стержня.**

Обосновывается формальное решение, полученное методом Фурье, первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Исследуется поведение коэффициентов Фурье при различных требованиях на исходные данные задачи. Формулируется и доказывается теорема о существовании классического решения задачи для одномерного уравнения теплопроводности.

**Тема 15. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.**

Формулируется и доказывается утверждение, называемое принципом максимума для уравнения теплопроводности. Обсуждается физический смысл принципа максимума и его варианты. Принцип максимума используется для доказательства единственности решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в классе ограниченных функций.

**Тема 16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье.**

Строится интегральное представление решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Используется метод разделения переменных, который приводит к методу интеграла Фурье ввиду непрерывности спектра пространственного оператора. Путем использования формальных преобразований, связанных синус- и косинус-интегралами Фурье получается представление решения в виде интеграла с ядром Пуассона. Указывается на связь с нормальным распределением Гаусса в теории вероятностей. Дается физическая интерпретация возникающей аналогии.

**Тема 17. Обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.**

Проводится обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для одномерного однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Метод основан на исследовании сходимости несобственных интегралов, зависящих от двух параметров (пространственной и временной переменных). Указывается на наличие факта о бесконечной скорости распространения тепла в данной модели. Отмечается эффект бесконечного сглаживания начальных данных задачи Коши.

**Тема 18. Основные граничные задачи для эллиптического уравнения. Исследование единственности решения основных граничных. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности стержня.**

Дается постановка смешанной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Методом энергетических неравенств исследуется единственность решения основных краевых задач для уравнения эллиптического типа дивергентного вида. При исследовании рассматривается смешанная краевая задача с участками границы с условиями Дирихле, Неймана и третьими граничными условиями. Формулируется и доказывается теорема о единственности решения.

**Тема 19. Гармонические функции. Формулы Грина. Основные свойства. Теоремы о среднем для гармонической функции.**



Методом энергетических неравенств исследуется единственность решения основных краевых задач для многомерного уравнения эллиптического типа дивергентного вида. При исследовании рассматривается смешанная краевая задача с участками границы с условиями Дирихле, Неймана и третьими граничными условиями. Формулируется и доказывается теорема о единственности классического решения при произвольном сочетании граничных условий.

**Тема 20. Принцип максимума для гармонической функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление гармонической функции.**

Вводится понятие гармонической функции в ограниченной трехмерной области, а также в области, являющейся дополнением ограниченной области до всего пространства. Строятся и доказываются формулы Грина. Формулируются основные свойства гармонических функций, среди которых выделяются теоремы о среднем. Проводится доказательство этих теорем. Анализируется физический смысл теорем о среднем.

**Тема 21. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения.**

Формулируется и доказывается принцип максимума для гармонической функции в произвольной и ограниченной области. Обсуждается физический смысл принципа максимума для гармонической функции. Вводится понятие фундаментального решения уравнения Лапласа. Получаются формулы для вычисления фундаментального решения уравнения Лапласа в двумерном и многомерном случаях. Формулируется и доказывается формула, называемая интегральным представлением гармонической в ограниченной трехмерной области через фундаментальное решение уравнения Лапласа.

**Тема 22. Метод функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа: определение функции Грина и ее основные свойства.**

Определение функции Грина для задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной трехмерной области. Основные свойства функции Грина: неотрицательность функции Грина, оценка сверху функции Грина через фундаментальное решение уравнения Лапласа. Общее описание метода функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной трехмерной области.

**Тема 23. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для шара методом функции Грина (формула Пуассона).**

Построение функции Грина для шара методом отражения (инверсии). Вычисление нормальной производной на сфере. Построение решения внутренней и внешней задач Дирихле для шара методом функции Грина (формулы Пуассона). Доказательство существования решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа при произвольной непрерывной граничной функции на основе формулы Пуассона.

**Тема 24. Поведение гармонической функции и ее производных на бесконечности. Исследование единственности решения внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа.**

Бесконечная дифференцируемость гармонической функции в любой точке, не лежащей на границе области гармоничности. Оценка скорости убывания гармонической функции и ее производных на бесконечности на основе формулы Пуассона. Постановка внутренней и внешней задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения внутренней и внешней задач Дирихле на основе принципа максимума. Исследование единственности решения внутренней задачи Неймана на основе формул Грина. Исследование единственности решения внешне задачи Неймана на основе формулы Грина.

**Тема 25. Метод разделения переменных решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области.**

Метод разделения переменных решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Модификация граничной функции. Разбиение задачи на четыре граничных задачи в прямоугольной области с однородными условиями Дирихле на трех сторонах. Разделение переменных. Представление решения в виде суммы бесконечных рядов по собственным функциям стандартной задачи Штурм - Лиувилля.

**Тема 26. Метод разделения переменных решения внутренней и внешней задач Дирихле для круга методом разделения переменных. Формула Пуассона.**

Представление оператора Лапласа в полярных координатах. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в полярных координатах. Построение исчерпывающего множества частных решений. Анализ регулярности частных решений. Построение решений внутренней и внешней задач Дирихле для круга в виде рядов из частных решений. Суммирование ряда, представляющего решение внутренней задачи Дирихле для круга. Интегральная формула Пуассона для внутренней и внешней задач Дирихле для круга.

#### **Тема 27. Потенциалы простого и двойного слоя, гармонические функции. Геометрические свойства поверхности Ляпунова.**

Точечные потенциалы Ньютона и Кулона. Определение потенциалов простого и двойного слоя и их физическая интерпретация. Теоремы о дифференциальных свойствах потенциалов внутри области и вне области. Поведение потенциалов простого слоя и потенциала двойного слоя на бесконечности. Понятие о поверхности Ляпунова. Примеры поверхностей удовлетворяющих условиям Ляпунова. Примеры поверхностей, не удовлетворяющих условиям Ляпунова. Леммы о геометрических свойствах поверхности Ляпунова.

#### **Тема 28. Прямое значение потенциала двойного слоя. Интеграл Гаусса.**

Понятие о прямом значении потенциала двойного слоя. Существование и непрерывность прямого значения потенциала двойного слоя в случае, когда потенциал задается непрерывным распределением диполей по поверхности Ляпунова. Частные случаи потенциала двойного слоя. Интеграл Гаусса. Интерпретация потенциала Гаусса, как телесного угла, под которым из данной точки пространства видна замкнутая поверхность.

#### **Тема 29. Предельные значения потенциала двойного слоя.**

Вывод формул, связывающих потенциал двойного слоя с интегралом Гаусса. Предельные значения потенциала двойного слоя при подходе точки наблюдения изнутри области к границе и извне области к границе. Разрывность потенциала двойного слоя при переходе через границу. Выявление скачков предельных значений потенциала двойного слоя при переходе через границу. Точки непрерывности потенциала двойного слоя при переходе через границу.

#### **Тема 30. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.**

Непрерывность потенциала простого слоя. Понятие правильной нормальной производной потенциала при подходе точки наблюдения к границе. Прямое значение правильной нормальной производной. Связь предельных значений потенциала двойного слоя с предельным значением правильной нормальной производной потенциала простого слоя. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.

#### **Тема 31. Интегральные уравнения теории потенциала.**

Сведение внутренней и внешней задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода относительно плотности потенциала, соответственно, двойного или простого слоя на основе теорем о предельных значениях потенциала двойного слоя и правильной нормальной производной потенциала простого слоя. Доказательство фредгольмовости интегральных уравнений теории потенциала. Теоремы о разрешимости внутренней и внешней задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа как следствия теорем Фредгольма о разрешимости интегральных уравнений второго рода.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.exponenta.ru>

## 6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## 7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы.

Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## 8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.exponenta.ru>

Сайт с учебными материалами по математике - <http://mathelp.spb.ru>

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамена, каждый день контролировать выполнение работы. Лучше, если можно, перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени, который полезно использовать для повторения материала.

Вид работ	Методические рекомендации
лабораторные работы	Обучающиеся выполняют задания, требующие создания уникальных объектов определённого типа. Тип объекта, его требуемые характеристики и методы его создания определяются потребностями профессиональной деятельности в соответствующей сфере либо целями тренировки определённых навыков и умений. Оцениваются креативность, владение теоретическим материалом по теме, владение практическими навыками.
самостоятельная работа	<p>Основной целью самостоятельных занятий по данному курсу является развитие навыков построения математических моделей типичных физических процессов, исследование их свойств, построение и исследование аналитических решений. При подготовке к каждому занятию необходимо обратиться к курсу лекций по данному вопросу и учебным пособиям, чтобы уточнить определения, формулировки основных результатов, найти аналоги решаемым задачам и выполняемым упражнениям. При работе с примерами необходимо стремиться не только к узнаванию способа решения каждой конкретной задачи, но и к пониманию цели его употребления в данном контексте, функциональной нагрузки, которой данный пример обладает.</p> <p>Изучение данного курса предусматривает систематическую самостоятельную работу студентов над лекционным материалом, текстами рекомендованных учебников и учебных пособий; развитие навыков самоконтроля, способствующих интенсификации учебного процесса. Изучение лекционного материала по конспекту лекций должно сопровождаться изучением рекомендуемой литературы, основной и дополнительной. Основной целью организации самостоятельной работы студентов является систематизация и активизация знаний, полученных ими на лекциях и в процессе подготовки к самостоятельным занятиям. Студентам следует стремиться к активизации знаний на занятиях по другим естественно-научным дисциплинам, связанным с данным курсом.</p> <p>Самостоятельная работа по изучению курса предполагает внеаудиторную работу, которая включает выполнение 31 самостоятельных работ.</p> <p>Этапы выполнения самостоятельных работ:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Просмотр записей лекционного курса и рекомендуемой литературы по теме задания.</li> <li>2. Составление резюме прочитанной главы соответствующего раздела рекомендуемого теоретического источника или учебника.</li> <li>3. Выполнение заданий по теме и их комментирование.</li> </ol> <p>При выполнении самостоятельных работ по разделам 'Классификация уравнений в частных производных второго порядка' и 'Приведение уравнений к каноническому виду' следует учитывать взаимосвязь этого материала с соответствующими разделами курсов математического анализа и алгебры и геометрии.</p> <p>Разделы курса, в которых уделяется внимание выводу основных уравнений математической физики, организованы так, что для понимания материала требуется лишь знание основ физики в области динамики твердого тела и основ термодинамики. Мы осознанно не выходим за эти рамки. Это упрощает понимание принципов вывода уравнений и постановки для них начально-краевых задач.</p> <p>Разделы курса, связанные с решением методом Фурье краевых задач для уравнений различных типов основываются на сведениях уравнений в частных производных к цепочкам задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение этих задач опирается на знание методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Также необходимы знания из курса математического анализа и, в частности, теории рядов Фурье.</p> <p>При решении задач рекомендованы сборники, в которых каждый раздел или ответы к разделу предваряются подробными решениями. Приступая к решению задач, рекомендуем внимательно изучить методы их решения.</p>
зачет	При подготовке к зачету обучающемуся рекомендуется составить план процесса подготовки, включающей изучение, повторение, систематизацию, логическую обработку материала, анализ полученной информацией с выявлением возможных следствий и неявных свойств объектов, составлением списка возможных дополнительных вопросов и заданий, подготовку к выполнению практических задач по темам дисциплины.
экзамен	При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, каждый день контролировать выполнение работы. Лучше, если можно, перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени, который полезно использовать для повторения материала.

#### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Компьютерный класс.

## **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки "Математическое моделирование".



Приложение 2  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.Б.15 Уравнения математической физики

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

**Основная литература:**

1. Карчевский, М.М. Лекции по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.М. Карчевский. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург : Лань, 2016. - 164 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72982>
2. Соболева, Е.С. Задачи и упражнения по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.С. Соболева, Г.М. Фатеева. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2012. - 96 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/5295>
3. Ильин, А.М. Уравнения математической физики [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.М. Ильин. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2009. - 192 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2181>

**Дополнительная литература:**

1. Сабитов, К.Б. Уравнения математической физики [Электронный ресурс] : учебник / К.Б. Сабитов. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2013. - 352 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59660>
2. Сборник задач по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.С. Владимиров [и др.]. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2016. - 520 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/104995>
3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Электронный ресурс] : учебник / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2000. - 400 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2363>



Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.Б.15 Уравнения математической физики

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.