

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Кривые дробной размерности и их применение в анализе Б1.В.ДВ.7

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Кац Б.А.

**Рецензент(ы):**

Насыров С.Р.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Насыров С. Р.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_\_ от "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_\_ от "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Кац Б.А. Кафедра математического анализа отделение математики , Boris.Kac@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Освоение современного на негладких, неспрямляемых и фрактальных объектах.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.7 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 6 семестр.

Для освоения курса 'Кривые дробной размерности и их применение в анализе' необходимы сведения и навыки из дисциплины Б.10 Алгебра, а именно: вычислительные навыки в арифметических операциях над матрицами и комплексными числами, представление о билинейных и эрмитовых (полуторалинейных) формах, линейно-независимых системах, векторных базисах, унитарных (ортогональных) операторах, скалярном произведении, понятие группы и фактор-группы; Б.9 Математический анализ: понятия сходимости, определенного интеграла и теоремы Коши. Кроме того, необходимы понятия из Б.16 Функциональный анализ: норма, нормированное пространство, полнота, мера, сходимость по мере, пространства суммируемых функций.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-3 (профессиональные компетенции)	способность к самостоятельной научно-исследовательской работе

В результате освоения дисциплины студент:

4. должен демонстрировать способность и готовность:

Обучающийся должен демонстрировать способность и готовность осваивать современные сложные разделы математического анализа, ориентироваться в современной научной литературе и вести научно-исследовательскую работу.

### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практи- ческие занятия	Лабора- торные работы	
1.	Тема 1. Фракталы и фрактальные размерности	6		4	4	0	
2.	Тема 2. Обобщения криволинейного интеграла	6		4	6	0	
3.	Тема 3. Свойства обобщенного интеграла типа Коши	6		6	4	0	
4.	Тема 4. Задача о скачке на фрактальной кривой	6		4	4	0	
5.	Тема 5. Задача Римана на замкнутой фрактальной кривой	6		2	2	0	
6.	Тема 6. Задача Римана на фрактальной дуге	6		4	4	0	
7.	Тема 7. Задача о скачке для обобщенных аналитических функций на фрактальных кривых	6		2	2	0	
.	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	Экзамен
	Итого			26	26	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

##### Тема 1. Фракталы и фрактальные размерности

###### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Феномен самоподобия. Канторовы множества и кривые Коха. Понятие фрактального множества. Непрямляемость фрактальной кривой. Примеры фрактальных кривых. Размерности Минковского, Безиковича, Хаусдорфа, Аикавы и др. Устранимость фрактальных множеств. Теоремы Пенлеве и Лузина. Теория Марцинкевича. Точки прикосновения.

###### **практическое занятие (4 часа(ов)):**

Феномен самоподобия. Канторовы множества и кривые Коха. Понятие фрактального множества. Непрямляемость фрактальной кривой. Примеры фрактальных кривых. Размерности Минковского, Безиковича, Хаусдорфа, Аикавы и др. Устранимость фрактальных множеств. Теоремы Пенлеве и Лузина. Теория Марцинкевича. Точки прикосновения.

##### Тема 2. Обобщения криволинейного интеграла

###### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Обобщения криволинейного интеграла на случай непрямолинейных кривых: аппроксимация контура; аппроксимация интегранда; интеграл как распределение; интеграл как поток; интеграл как билинейная форма. Свойства обобщенного криволинейного интеграла по непрямолинейным путям: линейность, аддитивность, монотонность.

###### **практическое занятие (6 часа(ов)):**

Обобщения криволинейного интеграла на случай непрямолинейных кривых: аппроксимация контура; аппроксимация интегранда; интеграл как распределение; интеграл как поток; интеграл как билинейная форма. Свойства обобщенного криволинейного интеграла по непрямолинейным путям: линейность, аддитивность, монотонность.

##### Тема 3. Свойства обобщенного интеграла типа Коши

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Свойства потенциала Коши. Связь интеграла типа Коши и потенциала Коши. Преобразование Коши мер и обобщенных функций. Граничные свойства обобщенного интеграла типа Коши по неспрямляемой кривой. Потенциал Коши и обобщенный интеграл типа Коши. Связь гладкости плотности обобщенного интеграла типа Коши со свойствами его граничных значений.

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Свойства потенциала Коши. Связь интеграла типа Коши и потенциала Коши. Преобразование Коши мер и обобщенных функций. Граничные свойства обобщенного интеграла типа Коши по неспрямляемой кривой. Потенциал Коши и обобщенный интеграл типа Коши. Связь гладкости плотности обобщенного интеграла типа Коши со свойствами его граничных значений.

**Тема 4. Задача о скачке на фрактальной кривой**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Решение задачи о скачке на замкнутой неспрямляемой кривой. Задача о скачке на замыкаемой неспрямляемой дуге. Порядок кручения незамыкаемой дуги. Интеграл Коши-Адамара по дуге сильного кручения. Асимптотика обобщенного интеграла типа Коши (Коши-Адамара) в точке с высоким порядком кручения и ее влияние на разрешимость задачи о скачке.

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Решение задачи о скачке на замкнутой неспрямляемой кривой. Задача о скачке на замыкаемой неспрямляемой дуге. Порядок кручения незамыкаемой дуги. Интеграл Коши-Адамара по дуге сильного кручения. Асимптотика обобщенного интеграла типа Коши (Коши-Адамара) в точке с высоким порядком кручения и ее влияние на разрешимость задачи о скачке.

**Тема 5. Задача Римана на замкнутой фрактальной кривой**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Однородная задача Римана на замкнутой неспрямляемой кривой. Неоднородная задача Римана на замкнутой неспрямляемой кривой. Влияние размерностей Минковского и Хаусдорфа на разрешимость краевой задачи Римана. Влияние показателей Марцинкевича на локальную разрешимость краевой задачи Римана. Случай гладко замыкаемой дуги.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Однородная задача Римана на замкнутой неспрямляемой кривой. Неоднородная задача Римана на замкнутой неспрямляемой кривой. Влияние размерностей Минковского и Хаусдорфа на разрешимость краевой задачи Римана. Влияние показателей Марцинкевича на локальную разрешимость краевой задачи Римана. Случай гладко замыкаемой дуги.

**Тема 6. Задача Римана на фрактальной дуге**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Однородная задача Римана на неспрямляемой дуге. Неоднородная задача Римана на неспрямляемой дуге. Влияние размерностей Минковского и Хаусдорфа на разрешимость краевой задачи Римана на дуге. Влияние показателей Марцинкевича на локальную разрешимость краевой задачи Римана на дуге. Случай дуги с высоким порядком кручения.

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Однородная задача Римана на неспрямляемой дуге. Неоднородная задача Римана на неспрямляемой дуге. Влияние размерностей Минковского и Хаусдорфа на разрешимость краевой задачи Римана на дуге. Влияние показателей Марцинкевича на локальную разрешимость краевой задачи Римана на дуге. Случай дуги с высоким порядком кручения.

**Тема 7. Задача о скачке для обобщенных аналитических функций на фрактальных кривых**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Уравнение Бельтрами, его роль и свойства. Представления решений уравнения Бельтрами в областях с непрямыми границами. Задача о скачке для уравнения Бельтрами на неспрямляемых кривых и дугах. Однородная и неоднородная краевые задачи Римана для уравнения Бельтрами на неспрямляемых кривых и дугах, в том числе на счетных множествах контуров.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Уравнение Бельтрами, его роль и свойства. Представления решений уравнения Бельтрами в областях с непрямыми границами. Задача о скачке для уравнения Бельтрами на неспрямляемых кривых и дугах. Однородная и неоднородная краевые задачи Римана для уравнения Бельтрами на неспрямляемых кривых и дугах, в том числе на счетных множествах контуров.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Фракталы и фрактальные размерности	6		домашняя работа	10	проверка домашнего задания
2.	Тема 2. Обобщения криволинейного интеграла	6		домашняя работа	8	проверка домашнего задания
3.	Тема 3. Свойства обобщенного интеграла типа Коши	6		домашняя работа	10	проверка домашнего задания
4.	Тема 4. Задача о скачке на фрактальной кривой	6		домашняя работа	4	проверка домашнего задания
5.	Тема 5. Задача Римана на замкнутой фрактальной кривой	6		домашняя работа	2	проверка домашнего задания
6.	Тема 6. Задача Римана на фрактальной дуге	6		домашняя работа	2	проверка домашнего задания

№	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
7.	Тема 7. Задача о скачке для обобщенных аналитических функций на фрактальных кривых	6		домашняя работа	2	проверка домашнего задания
	Итого				38	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Решение трудных задач методом обсуждения.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Фракталы и фрактальные размерности

проверка домашнего задания, примерные вопросы:

Фракталы и фрактальные размерности

### Тема 2. Обобщения криволинейного интеграла

проверка домашнего задания, примерные вопросы:

Обобщения криволинейного интеграла

### Тема 3. Свойства обобщенного интеграла типа Коши

проверка домашнего задания, примерные вопросы:

Свойства обобщенного интеграла типа Коши

### Тема 4. Задача о скачке на фрактальной кривой

проверка домашнего задания, примерные вопросы:

Задача о скачке на фрактальной кривой

### Тема 5. Задача Римана на замкнутой фрактальной кривой

проверка домашнего задания, примерные вопросы:

Задача Римана на замкнутой фрактальной кривой

### Тема 6. Задача Римана на фрактальной дуге

проверка домашнего задания, примерные вопросы:

Задача Римана на фрактальной дуге

### Тема 7. Задача о скачке для обобщенных аналитических функций на фрактальных кривых

проверка домашнего задания, примерные вопросы:

Задача о скачке для обобщенных аналитических функций на фрактальных кривых

### Итоговая форма контроля

экзамен (в 6 семестре)

Примерные вопросы к итоговой форме контроля

Понятие фрактала. Размерность Хаусдорфа, Размерность Минковского и Колмогорова. Обобщение криволинейного интеграла путем полигональной аппроксимации контура. Обобщение криволинейного интеграла путем аппроксимации интегрируемой функции. Теорема Мергеляна. Интеграл по неспрямляемой кривой как обобщенная функция. Интеграл по неспрямляемой кривой как поток. Интеграл по неспрямляемой кривой как билинейная форма. Преобразование Коши мер, распределений и потоков. Билинейные формы и ростки. Граничные свойства преобразований Коши мер, распределений и потоков. Применение преобразований Коши для решения задачи о скачке на неспрямляемых контурах. Применение преобразований Коши для решения однородной задачи Римана на неспрямляемых контурах. Применение преобразований Коши для решения неоднородной задачи Римана на неспрямляемых контурах.

### 7.1. Основная литература:

1. Шерстнев А. Н. Конспект лекций по математическому анализу [Текст: электронный ресурс] / А. Н. Шерстнев . - Изд. 5-е . - Электр. дан. (1 файл: 2,66 Мб) . - (Казань : Казанский государственный университет, 2009) . - Режим доступа: открытый . - URL: [http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2009\\_000165.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf)
2. Насыров С.Р. Интеграл Римана на отрезке и его приложения [Электронный ресурс] / С.Р.Насыров. - Электрон. дан. - Казань: Казанский(Приволжский) федеральный университет, 2013. - 45 с. - URL: <http://kpfu.ru/docs/F2109211871/Nasyrov.SR.Integral.Rimana.na.otrezke.i.ego.prilozheniya.pdf>
3. Насыров С.Р. Производная и неопределенный интеграл [Электронный ресурс] / С.Р.Насыров. - Электрон. дан. - Казань: Казанский(Приволжский) федеральный университет, 2013. - 68с. - URL: <http://kpfu.ru/docs/F950801586/Nasyrov.SR.Proizvodnaya.i.neopredelennyj.integral.pdf>
4. Луговая Г.Д. Неопределенный интеграл [Электронный ресурс] / Г.Д.Луговая, Г.Ш.Скворцова. - Электрон. дан. - Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013. - 46с. - URL: <http://kpfu.ru/docs/F348805300/Integraly.obsch.ispr.pdf>
5. Луговая Г.Д. Функции одной вещественной переменной [Электронный ресурс] / Г.Д. Луговая, Г.Ш. Скворцова. - Электрон. дан. - Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012. - 85с. - URL: <http://kpfu.ru/docs/F1247874232/lim1.pdf>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. - Том 1 : Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. - 2010. - 496 с. - ISBN 978-5-9221-0306-0. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2226>
2. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. - Том 2: Интегралы. Ряды. - 2009. - 504 с. - ISBN 978-5-9221-0307-7. - Текст: электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2227>
3. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. - 2-е изд., перераб. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. - Том 3: Функции нескольких переменных. - 2003. - 472 с. - ISBN 5-9221-0308-3. - Текст: электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань': [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/2220>
4. Материалы для подготовки к экзамену по математическому анализу. Механико-математический факультет [Текст: электронный ресурс]: задачи на доказательство. I семестр : учебно-методическое пособие / Казан. гос. ун-т, Мех.-мат. фак. ; сост. Б. А. Кац . - Электронные данные (1 файл: 0,1 Мб) . - (Казань : Казанский государственный университет, 2010) . - Загл. с экрана.- Для 1-го семестра . - Режим доступа: открытый . - URL: [http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2010\\_00005.4.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2010_00005.4.pdf)



## 5. Материалы для подготовки к экзамену по математическому анализу.

Механико-математический факультет [Текст: электронный ресурс]: задачи на доказательство. II семестр : учебно-методическое пособие / Казан. гос. ун-т, Мех.-мат. фак. ; сост. Б. А. Кац.- Электронные данные (1 файл: 0,1 Мб). - (Казань : Казанский государственный университет, 2010). - Загл. с экрана. - Для 2-го семестра .- Режим доступа: открытый . - URL: [http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2010\\_00005.5.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2010_00005.5.pdf)

### 7.3. Интернет-ресурсы:

граничные задачи теории функций комплексного переменного - [dic.academic.ru/dic.nsf/enc\\_mathematics/1245/](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/1245/)

Фрактал - это - [dic.academic.ru/dic.nsf/ntes/5230/ФРАКТАЛ](http://dic.academic.ru/dic.nsf/ntes/5230/ФРАКТАЛ)

Фракталы и теория хаоса - <http://www.ghcube.com/fractals/>

фракталы и теория хаоса - [www.ghcube.com/fractals/](http://www.ghcube.com/fractals/)

функции комплексного переменного -

<http://mathhelpplanet.com/static.php?p=funktsii-kompleksnogo-peremennogo>

### 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Кривые дробной размерности и их применение в анализе" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Обустроенный класс.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):

Кац Б.А. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Насыров С.Р. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.