

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт физики



УТВЕРЖДАЮ

Проректор
по образовательной деятельности КФУ
Проф. Таюрский Д.А.

"__" _____ 20__ г.

Программа дисциплины
Линейная алгебра Б1.Б.10

Направление подготовки: 28.03.01 - Нанотехнологии и микросистемная техника

Профиль подготовки: не предусмотрено

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Сушков С.В.

Рецензент(ы):

Попов А.А.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Сушков С. В.

Протокол заседания кафедры No ____ от "____" _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института физики:

Протокол заседания УМК No ____ от "____" _____ 201__ г

Регистрационный No

Казань
2019

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (доцент) Сушков С.В.
Кафедра теории относительности и гравитации Отделение физики, Sergey.Sushkov@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является изучение теории линейных пространств, линейных, билинейных форм, аффинных, евклидовых и унитарных пространств, и их применения при решении различных задач, возникающих в физике и математике.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел 'Б1.Б.10 Дисциплины (модули)' основной профессиональной образовательной программы 28.03.01 'Нанотехнологии и микросистемная техника (не предусмотрено)' и относится к базовой (общепрофессиональной) части.

Осваивается на 1 курсе в 2 семестре.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ок-8	способностью к овладению базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности
опк-2	способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат
опк-7	способностью учитывать современные тенденции развития электроники, измерительной и вычислительной техники, информационных технологий в своей профессиональной деятельности
пк-1	способностью использовать базовые теоретические знания (в том числе по дисциплинам профилизации) для решения профессиональных задач
пк-2	способностью применять на практике базовые профессиональные навыки

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

теорию линейных пространств и линейных операторов;
теорию линейных, билинейных, квадратичных, полуторалинейных и эрмитовых форм;
теорию самосопряженных, изометрических, унитарных и эрмитовых операторов в евклидовых и унитарных пространствах.

2. должен уметь:

определять, является ли указанное множество при заданных операциях сложения элементов и умножения на число линейным пространством;
определять размерность линейного пространства и его базис;

находить размерность и базис линейного подпространства, суммы и пересечения линейных подпространств;
 выполнять действия с матрицами (умножение на число, сложение, умножение, нахождение обратной матрицы);
 находить в заданном базисе матрицы линейной формы, линейного оператора, билинейной, квадратичной форм, координаты вектора;
 находить собственные векторы и собственные значения линейных операторов;
 осуществлять преобразования координат вектора, матриц линейного оператора, линейной формы, билинейной формы при переходе к новому базису;
 приводить квадратичные формы к каноническому виду;
 применять процесс ортогонализации и нормирования к произвольной системе векторов;
 ортогональными преобразованиями приводить уравнения поверхностей (кривых) второго порядка к каноническому виду в трехмерном (двумерном) собственно евклидовом пространстве.

3. должен владеть:

навыками вычислений, необходимыми для решения задач п. 3.2.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

применять полученные знания при решении конкретных учебных и исследовательских задач задач.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен во 2 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Теория линейных пространств и линейных операторов.	2		4	9	0	Контрольная работа
2.	Тема 2. Линейные, билинейные, квадратичные формы.	2		5	9	0	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
3.	Тема 3. Аффинные, евклидовы и унитарные пространства.	2		4	9	0	Контрольная работа
4.	Тема 4. Комплексные линейные пространства. Унитарное пространство.	2		5	9	0	Устный опрос
	Тема . Итоговая форма контроля	2		0	0	0	Экзамен
	Итого			18	36	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Теория линейных пространств и линейных операторов.

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Основные алгебраические понятия. Теория линейных пространств и линейных операторов. Аксиомы линейного пространства. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис. Линейные подпространства и линейные оболочки. Пересечение подпространств. Сумма и прямая сумма подпространств. Теорема о пополнении базиса. Теорема о размерности суммы подпространств. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Линейное пространство линейных отображений (матриц $m \times n$). Композиция отображений и умножение матриц. Обратный оператор и обратная матрица. Общая матричная группа степени n над полем P . Образ и ядро линейного отображения. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Спектр оператора. Теорема о связи геометрической и алгебраической кратности собственного значения. Переход к новому базису и инварианты линейного оператора. Нильпотентные и циклические линейные операторы. Каноническая форма Жордана. Матрицы оператора над полем C . Теорема Гамильтона-Кэлли и минимальный многочлен оператора. Многочленные матрицы и их элементарные преобразования. Каноническая диагональная форма многочленной матрицы. Инвариантные факторы, элементарные делители, характеристика Сегре оператора. Каноническая форма Жордана матрицы оператора над полем R . Матричный многочлен от переменной. Регулярные и сингулярные многочлены. Критерий подобия матриц и теорема о необходимых и достаточных условиях подобия.

практическое занятие (9 часа(ов)):

Занятие 1,2 . Линейные пространства, базис и размерность. Подпространства линейного пространства. Занятие 3,4. Пересечение и сумма подпространств.

Тема 2. Линейные, билинейные, квадратичные формы.

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Линейные, билинейные, квадратичные формы. Линейная форма (ковектор). Сопряженное пространство и кобазис. Дуальный (взаимный) кобазис. Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Переход к новому базису. Квадратичные формы. Теорема Лагранжа. Индексы инерции над полем R , теорема инерции. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

практическое занятие (9 часа(ов)):

Занятие 5, 6. Линейные операторы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Занятие 7, 8. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Занятие 9, 10. Переход к новому базису. Преобразование компонент матрицы оператора и вектора при переходе к новому базису.

Тема 3. Аффинные, евклидовы и унитарные пространства.

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Аффинные пространства и аффинные системы координат. Собственно евклидовы и псевдоевклидовы пространства. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Изометрический оператор. Самосопряженный оператор и его свойства. Связь симметричной билинейной (квадратичной) формой с соответствующим ей сопряженным оператором. Алгоритм Грамма-Шмидта ортогонализации системы векторов в Евклидовом пространстве. Теорема о каноническом диагональном виде матрицы самосопряженного оператора. Приведение квадратичных форм к каноническому виду ортогональными преобразованиями. Приведение в E^n общего уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду. невырожденные центральные и нецентральные поверхности. Цилиндры. Поверхности второго порядка в E^3 .

практическое занятие (9 часа(ов)):

Занятие 11, 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональными преобразованиями. Занятие 13, 14. Приведение к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

Тема 4. Комплексные линейные пространства. Унитарное пространство.

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Комплексные линейные пространства. Унитарное пространство. Эрмитовы и эрмитовы квадратичные формы. Симметричные эрмитовы и симметричные эрмитовы квадратичные формы. Унитарные пространства. Ортонормированные базисы и унитарные матрицы. Унитарные и эрмитовы операторы, их свойства. Теорема о каноническом виде матрицы эрмитова оператора.

практическое занятие (9 часа(ов)):

Занятие 15. Комплексные линейные пространства. Занятие 16. Контрольная работа

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Теория линейных пространств и линейных операторов.	2		подготовка к контрольной работе	4	Контрольная работа
2.	Тема 2. Линейные, билинейные, квадратичные формы.	2		подготовка домашнего задания	5	Письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Аффинные, евклидовы и унитарные пространства.	2		подготовка к контрольной работе	4	Контрольная работа
4.	Тема 4. Комплексные линейные пространства. Унитарное пространство.	2		подготовка к устному опросу	5	Устный опрос
	Итого				18	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Курс лекций и практических занятий, организованных по стандартной технологии в интерактивной форме с живым диалогом между преподавателем и студентом.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Теория линейных пространств и линейных операторов.

Контрольная работа , примерные вопросы:

Задание формируется из следующих типовых задач: 1. Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов и произведение любого элемента на любое число ? 2. Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых ? целые числа. 3. Множество всех векторов, лежащих на одной оси. 4. Множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей. 5. Исследовать на линейную зависимость систему векторов. 6. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы). 7. Найти координаты вектора в новом базисе , если он задан в старом базисе. 8. Являются ли линейными следующие преобразования: условия.

Тема 2. Линейные, билинейные, квадратичные формы.

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Задание формируется из следующих типовых задач: 1. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе , если она задана в старом базисе . 2. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе), образ и ядро оператора: 1) Проектирования на ось. 2) Проектирования на плоскость . 3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. 4. Исследовать кривую второго порядка и построить ее график. 5. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$? собственные векторы линейного оператора , относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор не является собственным вектором оператора . 6. Доказать, что если матрица оператора A ? симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы ? ортонормированные).

Тема 3. Аффинные, евклидовы и унитарные пространства.

Контрольная работа , примерные вопросы:

Задание формируется из следующих типовых задач: 1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа. 2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием. 3. Исследовать кривую второго порядка и построить ее. 4. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства пространства , если оно задано приведенным уравнением. 5. Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства. 6. Найти координаты многочлена в базисе в следующем базисе . 7. Линейный оператор в базисе имеет матрицу заданную матрицу. Найти матрицу этого же оператора в другом базисе . 8. Найти ядро и образ оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.

Тема 4. Комплексные линейные пространства. Унитарное пространство.

Устный опрос , примерные вопросы:

1. Аксиомы линейного пространства и их следствия. 2. Линейные формы. Сопряженные пространства. 3. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение. 4. Квадратичные формы. Теорема Лагранжа. 5. Линейные отображения. Матрица отображения. Ядро и образ. 6. Теорема об инерции квадратичных форм. 7. Композиция линейных отображений. Умножение матриц. 8. Критерий Сильвестра для квадратичных форм. 9. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. 10. Евклидово пространство. Ортогонализация системы векторов. 11. Преобразование базиса и преобразование матрицы линейного оператора. 12. Эрмитовы формы в комплексном линейном пространстве. 13. Инварианты линейного оператора. 14. Изометрический оператор в E_n . 15. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение. 16. самосопряженный оператор. Связь с квадратичными формами. 17. Квадратичные формы. Теорема Лагранжа. 18. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора. 19. Теорема об инерции квадратичных форм. 20. Унитарный оператор. Унитарные матрицы. 21. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. 22. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы. 23. Билинейные формы. Преобразование матрицы билинейной формы при преобразовании базиса. 24. Алгоритм приведения поверхности 2-го порядка к каноническому виду. 25. Инварианты линейного оператора. 26. Аксиоматика аффинного пространства. 27. Критерий Сильвестра для квадратичных форм. 28. Классификация поверхностей 2-го порядка в E_3 . 29. Линейные отображения. Матрица отображения. Ядро и образ. 30. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора. 31. Обратимый оператор и обратная матрица. 32. Изометрический оператор в E_n . 33. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение. 34. Эрмитовы формы в комплексном линейном пространстве. 35. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм. 36. Аффинные пространства. Преобразование аффинной системы координат. 37. Линейные формы. Сопряженные пространства. 38. Унитарный оператор. Унитарные матрицы. 39. Линейный оператор и его инварианты. 40. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора. 41. Теорема об инерции квадратичных форм. 42. Теорема о собственных значениях и собственных векторах эрмитова оператора.

Итоговая форма контроля

экзамен (в 2 семестре)

Примерные вопросы к экзамену:

БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНАМ.

Билет 1.

1. Аксиомы линейного пространства и их следствия.
2. Линейные формы. Сопряженные пространства.

Билет 2.

1. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение.
2. Квадратичные формы. Теорема Лагранжа.

Билет 3.

1. Линейные отображения. Матрица отображения. Ядро и образ.
2. Теорема об инерции квадратичных форм.

Билет 4.

1. Композиция линейных отображений. Умножение матриц.
2. Критерий Сильвестра для квадратичных форм.

Билет 5.

1. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
2. Евклидово пространство. Ортогонализация системы векторов.

Билет 6.

1. Преобразование базиса и преобразование матрицы линейного оператора.
2. Эрмитовы формы в комплексном линейном пространстве.

Билет 7.

1. Инварианты линейного оператора.
2. Изометрический оператор в E_n .

Билет 8.

1. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение.
2. самосопряженный оператор. Связь с квадратичными формами.

Билет 9.

1. Квадратичные формы. Теорема Лагранжа.
2. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора.

Билет 10.

1. Теорема об инерции квадратичных форм.
2. Унитарный оператор. Унитарные матрицы.

Билет 11.

1. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
2. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы.

Билет 12.

1. Билинейные формы. Преобразование матрицы билинейной формы при преобразовании базиса.
2. Алгоритм приведения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.

Билет 13.

1. Инварианты линейного оператора.
2. Аксиоматика аффинного пространства.

Билет 14.

1. Критерий Сильвестра для квадратичных форм.
2. Классификация поверхностей 2-го порядка в E_3 .

Билет 15.

1. Линейные отображения. Матрица отображения. Ядро и образ.
2. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора.

Билет 16.

1. Обратимый оператор и обратная матрица.
2. Изометрический оператор в E_n .

Билет 17.

1. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение.
2. Эрмитовы формы в комплексном линейном пространстве.

Билет 18.

1. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм.
2. Аффинные пространства. Преобразование аффинной системы координат.

Билет 19.

1. Линейные формы. Сопряженные пространства.
2. Унитарный оператор. Унитарные матрицы.

Билет 20.

1. Линейный оператор и его инварианты.
2. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора.

Билет 21.

1. Теорема об инерции квадратичных форм.
2. Теорема о собственных значениях и собственных векторах эрмитова оператора.

7.1. Основная литература:

Ильин, В.А. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. ? Электрон. дан. ? Москва : Физматлит, 2009. ? 224 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2179>. ? Загл. с экрана.

Цубербиллер, О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии [Электронный ресурс] : учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2009. ? 336 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/430>. ? Загл. с экрана.

Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [Электронный ресурс] : учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2017. ? 224 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/92615>. ? Загл. с экрана.

Карчевский, Е.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.М. Карчевский, М.М. Карчевский. ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2018. ? 424 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/109505>. ? Загл. с экрана.

Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник / П.С. Александров. ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2009. ? 512 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/493>. ? Загл. с экрана.

7.2. Дополнительная литература:

Мальцев, А.И. Основы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник / А.И. Мальцев. ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2009. ? 480 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/251>. ? Загл. с экрана.

Беклемишев, Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебное пособие / Д.В. Беклемишев. ? Электрон. дан. ? Москва : Физматлит, 2014. ? 192 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59632>. ? Загл. с экрана.

Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник / Д.В. Беклемишев. ? Электрон. дан. ? Москва : Физматлит, 2009. ? 312 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2109>. ? Загл. с экрана

7.3. Интернет-ресурсы:

КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ - <http://kpfu.ru/portal/docs/F996146974/kaigorodovV2.pdf>

Методические пособия Института физики - http://kpfu.ru/main_page?p_sub=12974

Методические пособия на сайте кафедры теории относительности и гравитации -

<http://kpfu.ru/physics/struktura/kafedry/kafedra-teorii-otnositelnosti-i-gravitacii/uchebnaya-rabota/uchebnye>

Р. Ф. Билялов, В. Г. Подольский Практические занятия по аналитической геометрии и линейной алгебре на физическом факультете КГУ (первый семестр) -

<http://kpfu.ru/portal/docs/F472366859/Bilyalov.Podolskij.1.semestr.djvu>

сайт кафедры теории относительности и гравитации - http://kpfu.ru/main_page?p_sub=5728

сайт кафедры теории относительности и гравитации - <http://toig-kazan.narod.ru/education.htm>

ЭБС - <http://www.knigafund.ru/>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Линейная алгебра" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебные аудитории для проведения лекционных и практических занятий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 28.03.01 "Нанотехнологии и микросистемная техника" и профилю подготовки не предусмотрено .

Автор(ы):

Сушков С.В. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Попов А.А. _____

"__" _____ 201__ г.