

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Функциональный анализ БЗ.В.10

Направление подготовки: 050100.62 - Педагогическое образование

Профиль подготовки: Математика, информатика и информационные технологии в билингвальной татарско-русской среде

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Денисова М.Ю.

**Рецензент(ы):**

-

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Шакирова Л. Р.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_г

Регистрационный No

Казань  
2016

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Денисова М.Ю. Кафедра теории и технологий преподавания математики и информатики отделение педагогического образования, Marina.Denisova@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Изучение понятий числовые множества, сравнение линейных множеств по трем следующим характеристикам: по мощности, по расположению множеств на прямой (структуре) и по мере. Сравнение интегрируемых измеримых и непрерывных функций и их поведение при переходе к пределу. Возникновение интеграла Лебега как обобщение интеграла Римана на возможно более широкий класс функций.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б3.В.10 Профессиональный" основной образовательной программы 050100.62 Педагогическое образование и относится к вариативной части. Осваивается на 3 курсе, 6 семестр.

Слушатели должны владеть знаниями по дисциплинам математический анализ, алгебра.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
СПК-8 (профессиональные компетенции)	способен понимать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности, роль и место математики в системе наук, значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике, общекультурное значение математики, владеет основными положениями истории развития математики, эволюции математических идей и концепциями современной математической науки.
СПК-10 (профессиональные компетенции)	владеет основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом
СПК-11 (профессиональные компетенции)	владеет современными формализованными математическими, информационно-логическими и логико-семантическими моделями и методами представления, сбора и обработки информации для учебных целей
СПК-12 (профессиональные компетенции)	владеет математикой как универсальным языком науки, средством моделирования явлений и процессов, способен пользоваться построением математических моделей для решения практических проблем, понимать критерии качества математических исследований, принципы экспериментальной и эмпирической проверки научных теорий, умением исследовать класс моделей, к которому принадлежит полученная модель конкретной ситуации, применяя математическую теорию

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
СПК-9 (профессиональные компетенции)	владеет культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой, способен понимать общую структуру математического знания, взаимосвязь между различными математическими дисциплинами, реализовывать основные методы математических рассуждений на основе общих методов научного исследования и опыта решения учебных и научных проблем, пользоваться языком математики и математической терминологией, корректно выражать и аргументировано обосновывать имеющиеся знания

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

Основные понятия по функциональному анализу (мощность множества; счетные и несчетные множества; строение замкнутых и открытых множеств на числовой прямой; меру Лебега; множества и функции, измеримые по Лебегу; интеграл Лебега; понятия метрического пространства; ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве).

2. должен уметь:

Используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями курса; точно и лаконично рассказывать или описывать решение задач.

3. должен владеть:

Основными положениями классических разделов теории функций действительного переменного; базовыми идеями и методами теории функций действительного переменного; основными понятиями школьного курса математики, связанные с теорией функций действительного переменного.

Студент должен демонстрировать способность и готовность применять свои знания на практике.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Элементы теории множеств	6		4	0	4	
2.	Тема 2. Открытые и замкнутые множества	6		6	0	6	
3.	Тема 3. Функции	6		6	0	6	
4.	Тема 4. Мера и измеримые множества	6		6	0	6	
5.	Тема 5. Интеграл Лебега	6		6	0	6	
6.	Тема 6. Метрические пространства	6		8	0	8	
<b>4.2 Содержание дисциплины</b>							
	Тема 6. Элементы теории множеств	6		0	0	0	экзамен
<b>лекционное занятие (4 часа(ов)):</b>							

Множества и их мощность. Счетные множества и их свойства. Множества мощности континуума и их свойства. Множество действительных чисел. Теоремы о мощности промежуточного множества и множестве сколь угодно большой мощности. Эквивалентность множеств. Теорема Кантора Бернштейна.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Множества и их мощность. Счетные множества и их свойства. Множества мощности континуума и их свойства. Множество действительных чисел. Теоремы о мощности промежуточного множества и множестве сколь угодно большой мощности. Эквивалентность множеств. Теорема Кантора Бернштейна.

**Тема 2. Открытые и замкнутые множества**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Понятие открытого и замкнутого числового множества. Свойства замкнутых и открытых множеств. Связь открытых и замкнутых множеств. Структура открытых множеств. Структура замкнутых множеств. Канторово совершенное множество.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Понятие открытого и замкнутого числового множества. Свойства замкнутых и открытых множеств. Связь открытых и замкнутых множеств. Структура открытых множеств. Структура замкнутых множеств. Канторово совершенное множество.

**Тема 3. Функции**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Общее понятие функции. Непрерывность. Основные свойства. Равномерная непрерывность. Функции с ограниченным изменением.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Общее понятие функции. Непрерывность. Основные свойства. Равномерная непрерывность. Функции с ограниченным изменением.

**Тема 4. Мера и измеримые множества**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Мера открытого множества Мера замкнутого множества. Внутренняя и внешняя меры множества. Мера Лебега и её свойства. Операции над измеримыми множествами. Понятие измеримой функции. Свойства измеримых по Лебегу функций. Последовательность измеримых функций.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Мера открытого множества Мера замкнутого множества. Внутренняя и внешняя меры множества. Мера Лебега и её свойства. Операции над измеримыми множествами. Понятие измеримой функции. Свойства измеримых по Лебегу функций. Последовательность измеримых функций.

**Тема 5. Интеграл Лебега**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Определение интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Суммируемые функции.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Определение интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Суммируемые функции.

**Тема 6. Метрические пространства**

**лекционное занятие (8 часа(ов)):**

Определение и примеры метрических пространств. Полные метрические пространства. Банахово пространство. Гильбертово пространство. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

**лабораторная работа (8 часа(ов)):**

Определение и примеры метрических пространств. Полные метрические пространства. Банахово пространство. Гильбертово пространство. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Элементы теории множеств	6		Повторение лекционного материала, подготовка к практическим занятиям	2	домашнее задание
2.	Тема 2. Открытые и замкнутые множества	6		Повторение лекционного материала, подготовка к практическим занятиям. подготовка к контрольной работ	3	контрольная работа
3.	Тема 3. Функции	6		Повторение лекционного материала, подготовка к практическим занятиям	3	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
4.	Тема 4. Мера и измеримые множества	6		Повторение лекционного материала, подготовка к практическим занятиям, подготовка к контрольной работ	3	домашнее задание
5.	Тема 5. Интеграл Лебега	6		Повторение лекционного материала, подготовка к практическим занятиям	3	домашнее задание
6.	Тема 6. Метрические пространства	6		Повторение лекционного материала, подготовка к практическим занятиям, подготовка к контрольной работ	4	контрольная работа
	Итого				18	

### 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Лекции, контрольные работы, коллоквиум, экзамен. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем. К экзамену допускаются студенты, показавшие положительные результаты по текущей работе в течение семестра.

### 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

#### Тема 1. Элементы теории множеств

домашнее задание , примерные вопросы:

Множества и их мощность. Счетные множества и их свойства. Множества мощности континуума и их свойства. Множество действительных чисел. Теоремы о мощности промежуточного множества и множестве сколь угодно большой мощности. Эквивалентность множеств. Теорема Кантора Бернштейна.

#### Тема 2. Открытые и замкнутые множества

контрольная работа , примерные вопросы:

Понятие открытого и замкнутого числового множества. Свойства замкнутых и открытых множеств. Связь открытых и замкнутых множеств. Структура открытых множеств. Структура замкнутых множеств. Канторово совершенное множество.

#### Тема 3. Функции

домашнее задание , примерные вопросы:

Общее понятие функции. Непрерывность. Основные свойства. Равномерная непрерывность. Функции с ограниченным изменением.

#### **Тема 4. Мера и измеримые множества**

домашнее задание , примерные вопросы:

Мера открытого множества Мера замкнутого множества. Внутренняя и внешняя меры множества. Мера Лебега и её свойства. Операции над измеримыми множествами. Понятие измеримой функции. Свойства измеримых по Лебегу функций. Последовательность измеримых функций.

#### **Тема 5. Интеграл Лебега**

домашнее задание , примерные вопросы:

Определение интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Суммируемые функции.

#### **Тема 6. Метрические пространства**

контрольная работа , примерные вопросы:

Определение и примеры метрических пространств. Полные метрические пространства. Банахово пространство. Гильбертово пространство. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

#### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

1. Эквивалентные множества. Мощность множества.
2. Счетность множества рациональных и алгебраических чисел. Несчетность множества действительных чисел.
3. Теорема Кантора-Бернштейна. Сравнение мощностей.
4. Строение открытых и замкнутых множеств на прямой. Мощность открытых множеств.
5. Длина элементарных множеств. Счетная аддитивность длины элементарных множеств.
6. Внешняя мера Лебега. Внутренняя мера Лебега.
7. Сравнение внешних и внутренних мер Лебега и Жордана.
8. Множества измеримые по Лебегу. Свойства измеримых множеств.
9. Счетная аддитивность и непрерывность меры Лебега.
10. Измеримость открытых, замкнутых и борелевских множеств.
11. Определение измеримой функции.
12. Свойства измеримых функций.
14. Определение интеграла Лебега.
15. Интегрируемость измеримой ограниченной функции.
16. Свойства интеграла Лебега от ограниченных функций.
17. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
18. Интеграл Лебега от неограниченной функции.
19. Свойства интеграла Лебега.
20. Необходимое и достаточное условие интегрируемости по Лебегу.
21. Пространства  $L^1$  и  $L^2$ .

#### **7.1. Основная литература:**

Функциональный анализ, Ильин, В. А.;Баталина, И. А., 2006г.

Функциональный анализ, Луговая, Галина Дмитриевна;Шерстнев, Анатолий Николаевич, 2008г.

Функциональный анализ, Сидоров, Анатолий Михайлович, 2010г.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -ФИЗМАТЛИТ, 2009 г. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2206](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206)

2. Ильин В.А., Позняк В.Г. Основы математического анализа. Ч.2 : Учеб. пособие для вузов: Ч. 2. - М.: Наука: Физматлит, 2009.

3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2005  
г.[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2342](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2342).  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2340](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2340)
4. Треногин В.А. Функциональный анализ: Учебник. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2007 г.

## **7.2. Дополнительная литература:**

Теория функций вещественной переменной, Натансон, Исидор Павлович, 2008г.

1. Виленкин Н.Я., Балк М.Б., Петров В.А. Математический анализ (Мощность, метрика, интеграл). - М.: Просвещение, 1980.
2. Очан Ю.С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. - М.: Просвещение, 1983.
3. Толстов Г.П. Ряды Фурье. - М.: Наука, 1980.

## **7.3. Интернет-ресурсы:**

справочник математических формул - <http://www.pm298.ru/reshenie/analitpl.php>

учебные материалы - <http://math.fizteh.ru/study/>

учебные пособия - <http://www.ksu.ru/f6/k6/index.php?id=15&idm=5>

электронное учебное пособие -

[http://kma.imkn.urfu.ru/Students/programms/Arestov/Lectures\\_tfdp.pdf](http://kma.imkn.urfu.ru/Students/programms/Arestov/Lectures_tfdp.pdf)

электронный учебник - <http://window.edu.ru/resource/880/77880>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Функциональный анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебные аудитории для проведения лекционных занятий. Доступ студентов к компьютеру с Microsoft Office, с выходом в Интернет.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 050100.62 "Педагогическое образование" и профилю подготовки Математика, информатика и информационные технологии в билингвальной татарско-русской среде .

Автор(ы):

Денисова М.Ю. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.