

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



Программа дисциплины

Дополнительные главы теории гладких многообразий М2.В.3

Направление подготовки: 010100.68 - Математика

Профиль подготовки: Геометрия и топология

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Шурыгин В.В.

Рецензент(ы):

-

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Шурыгин В. В.

Протокол заседания кафедры No ___ от "___" _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No ___ от "___" _____ 201__ г

Регистрационный No 81722114

Казань
2014

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Шурыгин В.В. Кафедра геометрии отделение математики , vadim.shurygin

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) "Дополнительные главы теории гладких многообразий" являются: углубленное изучение некоторых разделов теории гладких многообразий, таких как слоения на многообразиях и ассоциированные с ними комплексы дифференциальных форм; теоретическая и практическая подготовка в указанных областях; овладение современным математическим аппаратом, применяемым в геометрии слоений на многообразиях, для дальнейшего использования в приложениях.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " М2.В.3 Профессиональный" основной образовательной программы 010100.68 Математика и относится к вариативной части. Осваивается на 1 курсе, 1 семестр.

Дисциплина "Дополнительные главы теории гладких многообразий" предполагает знакомство с основными понятиями теории гладких многообразий и расслоенных пространств, а так-же римановой геометрии.

Приобретенные знания в результате освоения дисциплины "Дополнительные главы теории гладких многообразий" будут полезны в научно-исследовательской работе.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-5 (общекультурные компетенции)	способность порождать новые идеи
ОК-6 (общекультурные компетенции)	способность работать самостоятельно, заботой о качестве, стремлением к успеху
ОК-8 (общекультурные компетенции)	инициативность и лидерство
ПК-12 (профессиональные компетенции)	способность различным образом представлять и адаптировать математические знания с учетом уровня аудитории
ПК-15 (профессиональные компетенции)	возможность преподавания физико-математических дисциплин и информатики в общеобразовательных учреждениях, образовательных учреждениях начального профессионального, среднего профессионального и высшего профессионального образования на основе полученного фундаментального образования и научного мировоззрения
ПК-16 (профессиональные компетенции)	умение извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных журналов
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность к интенсивной научно-исследовательской и научно-изыскательской деятельности

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-6 (профессиональные компетенции)	самостоятельное построение целостной картины дисциплины
ПК-8 (профессиональные компетенции)	собственное видение прикладного аспекта в строгих математических формулировках

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

определения и свойства основных объектов на слоеных многообразиях, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.

2. должен уметь:

Уметь решать задачи вычислительного и теоретического характера в указанной области теории гладких многообразий, устанавливать взаимосвязи между понятиями, доказывать утверждения.

3. должен владеть:

методами решения различных задач теории слоений.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

1) Знать определения и свойства основных объектов на слоеных многообразиях, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.

2) Уметь решать задачи вычислительного и теоретического характера в указанной области теории гладких многообразий, устанавливать взаимосвязи между понятиями, доказывать утверждения.

3) Владеть методами решения различных задач теории слоений.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 1 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Дифференцируемое многообразие. Дифференцируемое отображение. Касательное пространство.	1	1-2	1	2	0	домашнее задание устный опрос
2.	Тема 2. Касательное расслоение. Векторные поля. Скобка Ли векторных полей.	1	2-3	1	2	0	домашнее задание устный опрос
3.	Тема 3. Распределения на многообразиях. Вполне интегрируемые распределения.	1	4-5	1	2	0	устный опрос домашнее задание
4.	Тема 4. Слоение на многообразии. Линейные слоения на торе. Категория слоеных многообразий.	1	5-7	2	4	0	контрольная работа устный опрос домашнее задание
5.	Тема 5. Трансверсальные подмногообразия. Голономия слоения.	1	7-9	2	4	0	устный опрос домашнее задание
6.	Тема 6. Кокасательное расслоение. Внешние формы и внешний дифференциал.	1	9-10	1	2	0	устный опрос домашнее задание
7.	Тема 7. Базовые функции на многообразии со слоением. Проектируемые векторные поля. Трансверсальное расслоение многообразия со слоением. Проектируемые связности	1	11-13	2	4	0	устный опрос домашнее задание
8.	Тема 8. Базовые когомологии многообразия со слоением. Слоеное расслоение. Поднятое слоение.	1	14-16	2	4	0	домашнее задание контрольная работа устный опрос

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
	Тема . Итоговая форма контроля	1		0	0	0	экзамен
	Итого			12	24	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Дифференцируемое многообразие. Дифференцируемое отображение. Касательное пространство.

лекционное занятие (1 часа(ов)):

Дифференцируемое многообразие. Дифференцируемое отображение. Касательное пространство.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Подмногообразие. Погружения и вложения.

Тема 2. Касательное расслоение. Векторные поля. Скобка Ли векторных полей.

лекционное занятие (1 часа(ов)):

Касательное расслоение. Векторные поля. Алгебра Ли векторных полей. Скобка Ли векторных полей.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Поток. Перенос тензорных полей

Тема 3. Распределения на многообразиях. Вполне интегрируемые распределения.

лекционное занятие (1 часа(ов)):

Распределения на многообразиях. Вполне интегрируемые распределения.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Теорема Фробениуса.

Тема 4. Слоение на многообразии. Линейные слоения на торе. Категория слоеных многообразий.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Слоение на многообразии. Линейные слоения на торе. Топология слоев слоения.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Слои слоения. Линейные слоения на торе. Слоения Рибба на торе и трехмерной сфере. Слоения, порождаемые субмерсиями. Категория слоеных многообразий.

Тема 5. Трансверсальные подмногообразия. Голономия слоения.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Трансверсальные подмногообразия. Голономия слоения.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Скольжение ростка трансверсали вдоль слоя. Голономия слоения. Псевдогруппа голономии.

Тема 6. Кокасательное расслоение. Внешние формы и внешний дифференциал.

лекционное занятие (1 часа(ов)):

Кокасательное расслоение. Внешние формы и внешний дифференциал. Производная Ли внешней формы.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Когомологии де Рама. Группы когомологий гладкого многообразия. Лемма Пуанкаре

Тема 7. Базовые функции на многообразии со слоением. Проектируемые векторные поля. Трансверсальное расслоение многообразия со слоением. Проектируемые связности

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Базовые функции на многообразии со слоением. Проектируемые векторные поля. Трансверсальное расслоение многообразия со слоением. Проектируемые связности.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Трансверсальные поля на многообразии со слоением. Расслоение трансверсальных ре-перов. Проектируемые связности.

Тема 8. Базовые кохомологии многообразия со слоением. Слоеное расслоение. Поднятое слоение.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Базовые кохомологии многообразия со слоением. Слоеное расслоение. Поднятое слоение.

практическое занятие (4 часа(ов)):

dF-кохомологии многообразия со слоением. Препятствия к существованию проектируемых связностей.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Дифференцируемое многообразие. Дифференцируемое отображение. Касательное пространство.	1	1-2	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
				подготовка к устному опросу	2	устный опрос
2.	Тема 2. Касательное расслоение. Векторные поля. Скобка Ли векторных полей.	1	2-3	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
				подготовка к устному опросу	2	устный опрос
3.	Тема 3. Распределения на многообразиях. Вполне интегрируемые распределения.	1	4-5	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
				подготовка к устному опросу	2	устный опрос
4.	Тема 4. Слоение на многообразии. Линейные слоения на торе. Категория слоеных многообразий.	1	5-7	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	4	контрольная работа
				подготовка к устному опросу	4	устный опрос
5.	Тема 5. Трансверсальные подмногообразия. Голономия слоения.	1	7-9	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
				подготовка к устному опросу	4	устный опрос

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
6.	Тема 6. Кокасательное расслоение. Внешние формы и внешний дифференциал.	1	9-10	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
				подготовка к устному опросу	2	устный опрос
7.	Тема 7. Базовые функции на многообразии со слоением. Проектируемые векторные поля. Трансверсальное расслоение многообразия со слоением. Проектируемые связности	1	11-13	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
				подготовка к устному опросу	4	устный опрос
8.	Тема 8. Базовые когомологии многообразия со слоением. Слоеное расслоение. Поднятое слоение.	1	14-16	подготовка домашнего задания	4	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	4	контрольная работа
				подготовка к устному опросу	4	устный опрос
Итого					72	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

активные и интерактивные формы проведения занятий.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Дифференцируемое многообразие. Дифференцируемое отображение. Касательное пространство.

домашнее задание , примерные вопросы:
 решение задач по теме практических занятий
 устный опрос , примерные вопросы:
 опрос теоретического материала

Тема 2. Касательное расслоение. Векторные поля. Скобка Ли векторных полей.

домашнее задание , примерные вопросы:
 решение задач по теме практических занятий
 устный опрос , примерные вопросы:
 опрос теоретического материала

Тема 3. Распределения на многообразиях. Вполне интегрируемые распределения.

домашнее задание , примерные вопросы:
 решение задач по теме практических занятий

устный опрос , примерные вопросы:

опрос теоретического материала

Тема 4. Слоение на многообразии. Линейные слоения на торе. Категория слоеных многообразий.

домашнее задание , примерные вопросы:

решение задач по теме практических занятий

контрольная работа , примерные вопросы:

Пример варианта контрольной работы в формате LaTeX. 1. На плоскости \mathbb{R}^2 задано векторное поле $X(x,y)=\{-x,-2y\}$. Нарисовать векторы поля. Найти уравнения локальной 1-параметрической группы преобразований, порождаемой полем X . Определить траектории этой группы. Нарисовать эти траектории. 2. Касательное пространство. Касательное отображение. Касательное расслоение. Найти образ вектора с координатами $\{-1;2\}$, заданного в точке $(0;3)\in\mathbb{R}^2$ при отображении $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, заданном уравнениями $y^1=(x^1)^2+2x^2$, $y^2=x^1x^2$, $y^3=x^1-(x^2)^2$. 3. Критические точки и критические значения дифференцируемого отображения $f:M_n\to W_m$. При каком значении a уравнение $x^2+xy+y^2-3x=a$ не определяет подмногообразия в \mathbb{R}^2 ? 4. Скобка Ли векторных полей $X\{x^1x^2,x^1+x^2\}$ и $Y\{x^1-x^2,(x^2)^2\}$ на плоскости \mathbb{R}^2 .

устный опрос , примерные вопросы:

опрос теоретического материала

Тема 5. Трансверсальные подмногообразия. Голономия слоения.

домашнее задание , примерные вопросы:

решение задач по теме практических занятий

устный опрос , примерные вопросы:

опрос теоретического материала

Тема 6. Кокасательное расслоение. Внешние формы и внешний дифференциал.

домашнее задание , примерные вопросы:

решение задач по теме практических занятий

устный опрос , примерные вопросы:

опрос теоретического материала

Тема 7. Базовые функции на многообразии со слоением. Проектируемые векторные поля. Трансверсальное расслоение многообразия со слоением. Проектируемые связности

домашнее задание , примерные вопросы:

решение задач по теме практических занятий

устный опрос , примерные вопросы:

опрос теоретического материала

Тема 8. Базовые когомологии многообразия со слоением. Слоеное расслоение. Поднятое слоение.

домашнее задание , примерные вопросы:

решение задач по теме практических занятий

контрольная работа , примерные вопросы:

Пример варианта контрольной работы в формате LaTeX. 1. Найти обратный образ дифференциальной формы $\omega=xdy\wedge dz+ydx\wedge dz$ относительно отображения $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, заданного уравнениями $x=u^2+u$, $y=uv+2v+3$, $z=u^3-3u$. 2. Вычислить внешний дифференциал $d(\omega_1\wedge\omega_2)$ внешнего произведения двух внешних дифференциальных форм $\omega_1=x^2dx^3\wedge dx^4+x^1x^3dx^2\wedge dx^4$ и $\omega_2=2x^3dx^1-x^2x^3dx^3$ заданных на области $U\subset\mathbb{R}^4$. 3. Найти когомологии де Рама многообразия $S^1\times S^2$.

устный опрос , примерные вопросы:

опрос теоретического материала

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к зачету:

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. Литература для самостоятельного изучения имеется в библиотеке и в электронном виде.

Пример варианта контрольной работы ♦1 в формате LaTeX.

1. На плоскости \mathbb{R}^2 задано векторное поле

$$X(x,y) = \{-x, -2y\}.$$

Нарисовать векторы поля. Найти уравнения локальной 1-параметрической группы преобразований, порождаемой полем X . Определить траектории этой группы. Нарисовать эти траектории.

2. Касательное пространство. Касательное отображение. Касательное расслоение.

Найти образ вектора с координатами $\{-1; 2\}$, заданного в точке

$(0; 3) \in \mathbb{R}^2$ при отображении $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданном уравнениями

$$y^1 = (x^1)^2 + 2x^2, \quad y^2 = x^1 x^2, \quad y^3 = x^1 - (x^2)^2.$$

$$y^1 = (x^1)^2 + 2x^2, \quad y^2 = x^1 x^2, \quad y^3 = x^1 - (x^2)^2.$$

$$y^1 = (x^1)^2 + 2x^2, \quad y^2 = x^1 x^2, \quad y^3 = x^1 - (x^2)^2.$$

3. Критические точки и критические значения дифференцируемого отображения

$f: M_n \rightarrow W_m$.

При каком значении a уравнение

$$x^2 + xy + y^2 - 3x = a$$

$$x^2 + xy + y^2 - 3x = a$$

не определяет подмногообразия в \mathbb{R}^2 ?

4. Скобка Ли векторных полей. Вычислить скобку Ли векторных полей

$X\{x^1 x^2, x^1 + x^2\}$ и $Y\{x^1 - x^2, (x^2)^2\}$ на плоскости \mathbb{R}^2 .

Пример варианта контрольной работы ♦2 в формате LaTeX.

1. Найти обратный образ дифференциальной

формы $\omega = xdy \wedge dz + ydx \wedge dz$

относительно отображения $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданного уравнениями

$$x = u^2 + u, \quad y = uv + 2v + 3, \quad z = u^3 - 3u.$$

2. Вычислить внешний дифференциал

$d(\omega_1 \wedge \omega_2)$ внешнего

произведения двух внешних

дифференциальных форм

$\omega_1 = x^2 dx^3 \wedge dx^4 + x^1 x^3 dx^2 \wedge dx^4$ и

$\omega_2 = 2x^3 dx^1 - x^2 x^3 dx^3$ заданных на области $U \subset \mathbb{R}^4$.

3. Найти когомологии де Рама многообразия $S^1 \times S^2$.

Пример экзаменационного билета

1. Слоеное расслоение.

2. Теорема Фробениуса в формулировке векторных полей.

3. Найти обратный образ дифференциальной формы $\omega = xdy \wedge dz - zdx \wedge dz$ относительно отображения $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданного уравнениями $x = u^2 + 2u$, $y = uv - v^2 + 3u$, $z = v^3 + 7uv$.

\par

Найти образ вектора $\mathbf{a} = \{-2; 1\}$, заданного в точке $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ относительно этого же отображения.

7.1. Основная литература:

Проективная геометрия и проективные метрики, Буземан, Герберт; Келли, Пол Дж., 2010г.
Функциональный анализ, Луговая, Галина Дмитриевна; Шерстнев, Анатолий Николаевич, 2008г.

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд-во Лань, 2010, 512 с. // http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=617

7.2. Дополнительная литература:

Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Антонов, Валерий Иванович; Лагунова, Марина Витальевна; Лобкова, Наталья Ивановна, 2013г.

1. Molino P. Riemannian foliations. Birkhauser, 1988, 339 pp.

2. Тамура И. Топология слоений. М. Мир. 1979. 320 с.

3. Фукс Д.Б. Слоения. "Алгебра. Топология. Геометрия. т. 18 (Итоги науки и техники ВИНТИ)" М. 1980, с. 151-213.

4. Candel A., Conlon L. Foliations I. AMS. Graduate Studies in Math. Vol. 23. 2000. 402

5. Кобаяси К., Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии. Т. I. М. Наука. 1981. 344 с.

6. Reinhart B.L. Differential geometry of foliations. The fundamental integrability problem. Springer. 1983. 1954 p.

7. Прасолов В.В. Задачи по топологии. Изд-во МЦНМО, 2008, 40 с. // http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9391

7.3. Интернет-ресурсы:

Геометрия групп Ли. - http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9406

Курс дифференциальной геометрии и топологии - http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=617

Сборник задач по дифференциальной геометрии - http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9440

Современные геометрические структуры и поля - http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9379

Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии - http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9395

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Дополнительные главы теории гладких многообразий" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010100.68 "Математика" и магистерской программе Геометрия и топология .

Автор(ы):

Шурыгин В.В. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

"__" _____ 201__ г.