

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по образовательной деятельности КФУ  
проф. Таюрский Д.А.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## **Программа дисциплины**

Эллиптические функции

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2018

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Обносов Ю.В. (Кафедра математического анализа, отделение математики), yurii.obnosov@kpfu.ru

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-1	Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики
ПК-5	Способен находить и извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных журналов и т.п.
ПК-6	Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию
ПК-7	Обладать навыками преподавания математики и информатики в средней школе, специальных учебных заведениях, высших учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен демонстрировать способность и готовность:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- понимать место и роль теории эллиптических функций в структуре комплексного анализа;
- обладать теоретическими знаниями о методах, используемых при построении теории эллиптических функций;
- ориентироваться в различных классах специальных эллиптических функций;
- приобрести навыки в использовании аппарата теории эллиптических функций и овладеть техникой расчетов с помощью эллиптических функций.

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.03.04 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Анализ на многообразиях)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 1 курсе в 1 семестре.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 48 часа(ов), в том числе лекции - 24 часа(ов), практические занятия - 24 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 60 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 1 семестре.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Поле эллиптических функций. Элементарные свойства эллиптических функций	1	4	4	0	8
2.	Тема 2. Пе - функция Вейерштрасса.	1	4	4	0	12
3.	Тема 3. Дзета и сигма -функции Вейерштрасса.	1	4	4	0	12
4.	Тема 4. Функции пе, дзета и сигма как функции от основных периодов	1	4	4	0	10
5.	Тема 5. Тэта-функции: тэта_0-тэта_3, сигма_1-сигма_3	1	4	4	0	10
<b>4.2 Содержание дисциплины (модуля)</b>						
<b>Тема 1. Поле эллиптических функций. Элементарные свойства эллиптических функций</b>						
6.	Элементарные свойства эллиптических функций. Структура модуля периодов, модули первого и второго рода. Доказать, что модуль первого рода является суммой целых кратных двух основных периодов. Параллелограмм периодов. Порядок эллиптической функции. Полная система нулей и полюсов и с-точек эллиптических функций.	1	4	4	0	8
<b>Тема 2. Пе - функция Вейерштрасса.</b>						

Представление пе-функции в виде суммы простых дробей с помощью теоремы Коши для мероморфных функций. Доказательство сравнимости суммы полюсов пе-функции с нулем. Дифференциальное уравнение для пе-функции. Инварианты пе-функции. Теорема сложения. Представления эллиптических функций через пе-функцию (четная, нечетная функции, общий случай).

#### **Тема 3. Дзета и сигма -функции Вейерштрасса.**

Квазипериодичность дзета-функции. Представление дзета-функции в виде суммы простых дробей с помощью теоремы Коши для мероморфных функций. Соотношение Лежандра. Выражение эллиптических функций через дзета-функцию. Сигма-функция, логарифмическая производная дзета-функции, ее свойства. Выражение эллиптических функций через сигма-функцию.

#### **Тема 4. Функции пе, дзета и сигма как функции от основных периодов**

Функции пе, дзета и сигма как функции от основных периодов  $\omega_1, \omega_2$ . Однородность перечисленных функций как функций переменных  $z, \omega_1, \omega_2$ , доказательство однородности рассматриваемых функций по  $z, \omega_1, \omega_2$ . Эквивалентные периоды. Функции пе, дзета и сигма как функции от инвариантов  $g_1, g_2$ .

#### **Тема 5. Тэта-функции: тэта\_0-тэта\_3, сигма\_1-сигма\_3**

Тэта-функции: тэта\_0-тэта\_3, сигма\_1-сигма\_3. Ряд Фурье для периодических функций. Основные обозначения. Первая тэта-функция и ее ряд. Тэта-функции и их связь с пе -функцией. Тэта\_0-тэта\_3 -функции и их связь с сигма\_1-сигма\_3 -функциями. Обобщение понятия тэта-функции. Связь тэта функций между собой. Разложение тэта-функций в бесконечное произведение.

#### **Тема 6. Приложения теории эллиптических функций к теории чисел**

Приложения к теории чисел. Число представлений целого положительного числа  $m$  в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Число представлений целого положительного числа  $m$  в виде суммы четырех квадратов целых чисел - показать, что это число равно восьмикратной сумме положительных делителей числа, не делящихся на четыре. Обобщенная теорема Ферма.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Специальные функции. Дополнительные главы - [https://e.lanbook.com/book/2287#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/2287#book_name)

Введение в теорию функций комплексного переменного - [https://e.lanbook.com/book/322#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/322#book_name)

Специальные функции и их приложения - [https://e.lanbook.com/book/550#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/550#book_name)

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Обязательное посещение лекций ведущего преподавателя; лекции - основное методическое руководство при изучении дисциплины, наиболее оптимальным образом структурированное и скорректированное на современный материал; в лекции глубоко и подробно, аргументировано и методологически строго рассматриваются главные проблемы темы; в лекции даются необходимые разные подходы к исследуемым проблемам.
практические занятия	Основной целью практических занятий по дисциплине "Эллиптические функции" является умение применять полученные лекционные знания и методы на практике, более глубокое и детальное изучение основных понятий, объектов и их свойств, отработка практических навыков решения задач. Разбор и самостоятельное решение ряда задач повышенной трудности.
самостоятельная работа	Основой самостоятельной работы студентов является проработка лекционного материала и выполнение домашних практических заданий. Внеаудиторная самостоятельная работа студентов включает следующие ее виды: □ проработку и повторение лекционного материала, используя конспекты лекций, учебники, учебные пособия, методические указания, специальную литературу и ресурсы сети Интернет; □ выполнение домашнего практического задания; □ подготовка к контрольным работам.
экзамен	На экзамене проводится комплексная проверка как практических, так и теоретических знаний и умений, полученных студентами в учебном году. Необходимо обратить особое внимание на узловые темы: Основные свойства эллиптических функций; определение и свойства пе-функции Вейерштрасса; сигма- и дзета-функции Вейерштрасса.

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

**11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

**12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;

- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;

- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;

- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Анализ на многообразиях".

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2018

**Основная литература:**

1. Львовский, С.М. Лекции по комплексному анализу [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.М. Львовский. - Электрон. дан. - Москва : МЦНМО, 2009. - 136 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9365>
2. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной [Электронный ресурс] : учебник / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов ; под ред. В.А. Ильина. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2010. - 336 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/48167>

**Дополнительная литература:**

1. Посицельская, Л.Н. Теория функций комплексной переменной в задачах и упражнениях [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.Н. Посицельская. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2007. - 136 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59465>
2. Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2006. - 312 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2763>

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2018

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.