

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ
проф. Таюрский Д.А.

"__" _____ 20__ г.

Программа дисциплины

Методы решения экстремальных задач Б1.В.ДВ.07.07

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2018

Автор(ы): Фалилеева М.В.

Рецензент(ы): Киндер М.И.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Шакирова Л. Р.

Протокол заседания кафедры No ___ от "___" _____ 20__ г.

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No ___ от "___" _____ 20__ г.

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы
2. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы высшего образования
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
 - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
 - 4.2. Содержание дисциплины
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
 - 6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы и форм контроля их освоения
 - 6.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания
 - 6.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы
 - 6.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций
7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
 - 7.1. Основная литература
 - 7.2. Дополнительная литература
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. Фалилеева М.В. (Кафедра теории и технологий преподавания математики и информатики, отделение педагогического образования), Marina.Falileeva@kpfu.ru

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Выпускник, освоивший дисциплину, должен обладать следующими компетенциями:

| Шифр компетенции | Расшифровка приобретаемой компетенции |
|------------------|---|
| ПК-5 | Способен находить и извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных журналов и т.п. |
| ПК-6 | Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию |
| ПК-7 | Обладать навыками преподавания математики и информатики в средней школе, специальных учебных заведениях, высших учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования |

Выпускник, освоивший дисциплину:

Должен демонстрировать способность и готовность:

- применять неполную индукцию для выдвижения гипотез решения математических задач;
- знать методы решения 'классических' математических алгебраических, геометрических и комбинаторных задач на экстремумы;
- применять метод от противного при решении различных экстремальных задач на доказательство;
- уметь отличать задачи на развитие продуктивного мышления от задач репродуктивного характера;
- знать основные образовательные ресурсы по элементарной математике;
- находить задачи различных уровней трудности по изученным темам в учебной, учебно-методической литературе;
- уметь представлять решения задач как в устной, так и в письменной форме.

- применять неполную индукцию для выдвижения гипотез решения математических задач;
- знать методы решения 'классических' математических алгебраических, геометрических и комбинаторных задач на экстремумы;
- применять метод от противного при решении различных экстремальных задач на доказательство;
- уметь отличать задачи на развитие продуктивного мышления от задач репродуктивного характера;
- знать основные образовательные ресурсы по элементарной математике;
- находить задачи различных уровней трудности по изученным темам в учебной, учебно-методической литературе;
- уметь представлять решения задач как в устной, так и в письменной форме.

2. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы высшего образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.07.07 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Анализ на многообразиях)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 2 курсе в 3 семестре.

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 28 часа(ов), в том числе лекции - 0 часа(ов), практические занятия - 28 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 80 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 3 семестре.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

| N | Разделы дисциплины / модуля | Семестр | Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах) | | | Самостоятельная работа |
|----|---|---------|--|----------------------|---------------------|------------------------|
| | | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | |
| 1. | Тема 1. Экстремальные задачи в планиметрии. | 3 | 0 | 8 | 0 | 20 |
| 2. | Тема 2. Задачи на экстремум в стереометрии. | 3 | 0 | 8 | 0 | 20 |
| 3. | Тема 3. Алгебраические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. | 3 | 0 | 8 | 0 | 20 |
| 4. | Тема 4. Комбинаторные задачи в геометрии на нахождение экстремумов | 3 | 0 | 4 | 0 | 20 |
| | Итого | | 0 | 28 | 0 | 80 |

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Экстремальные задачи в планиметрии.

Простые задачи на нахождение минимальных и максимальных расстояний между различными геометрическими фигурами. Максимальные и минимальные площади вписанных фигур. Задача Герона и ее обобщения. Теорема Фаньяно. Теорема Ферма-Торриччели-Штейнера. Теорема Помпею. Сети Штейнера. Изопериметрическая задача.

Тема 2. Задачи на экстремум в стереометрии.

Задачи на минимальные расстояния между различными пространственными фигурами: точками, скрещивающимися прямыми, точкой и плоскостью, прямой и плоскостью. Задачи на наибольшие и наименьшие меры углов (между прямыми, плоскостями). Нахождение наибольших и наименьших площади поверхности и объемов многогранников, тел вращения.

Тема 3. Алгебраические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений.

Неравенства между средним арифметическим и геометрическим. Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений сумм степеней. Алгебраические задачи на неравенства треугольника, четырехугольника (суммы и произведения сторон треугольника и четырехугольника, диагоналей четырехугольника, площадей многоугольника и др.). Задача Тартальи.

Тема 4. Комбинаторные задачи в геометрии на нахождение экстремумов

Понятие прямых и окружностей общего положения. Нахождение наибольшего числа точек пересечения прямых, окружностей. Нахождение наибольшего числа частей плоскости. Задачи на наибольшее число вписанных многоугольников. Задачи на построение наибольшего числа прямых и плоскостей, проходящих через заданные точки.

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301).

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений".

Положение от 29 декабря 2018 г. № 0.1.1.67-08/328 "О порядке проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Положение № 0.1.1.67-06/241/15 от 14 декабря 2015 г. "О формировании фонда оценочных средств для проведения текущей, промежуточной и итоговой аттестации обучающихся федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Положение № 0.1.1.56-06/54/11 от 26 октября 2011 г. "Об электронных образовательных ресурсах федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Регламент № 0.1.1.67-06/66/16 от 30 марта 2016 г. "Разработки, регистрации, подготовки к использованию в учебном процессе и удаления электронных образовательных ресурсов в системе электронного обучения федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Регламент № 0.1.1.67-06/11/16 от 25 января 2016 г. "О балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Регламент № 0.1.1.67-06/91/13 от 21 июня 2013 г. "О порядке разработки и выпуска учебных изданий в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

6.1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы и форм контроля их освоения

| Этап | Форма контроля | Оцениваемые компетенции | Темы (разделы) дисциплины |
|------------------|-----------------------------|-------------------------|---|
| Семестр 3 | | | |
| | Текущий контроль | | |
| 1 | Письменное домашнее задание | ПК-5, ПК-6 | 1. Экстремальные задачи в планиметрии. 2. Задачи на экстремум в стереометрии. 3. Алгебраические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. 4. Комбинаторные задачи в геометрии на нахождение экстремумов |
| 2 | Устный опрос | ПК-7 | 1. Экстремальные задачи в планиметрии. 2. Задачи на экстремум в стереометрии. 3. Алгебраические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. 4. Комбинаторные задачи в геометрии на нахождение экстремумов |
| 3 | Презентация | ПК-7 | 1. Экстремальные задачи в планиметрии. 2. Задачи на экстремум в стереометрии. 3. Алгебраические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. 4. Комбинаторные задачи в геометрии на нахождение экстремумов |
| | Экзамен | ПК-5, ПК-6, ПК-7 | |

6.2 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

| Форма контроля | Критерии оценивания | | | | Этап |
|-------------------------|---------------------|--------|--------|-------|------|
| | Отлично | Хорошо | Удовл. | Неуд. | |
| Семестр 3 | | | | | |
| Текущий контроль | | | | | |

| Форма контроля | Критерии оценивания | | | | Этап |
|-----------------------------|--|---|--|---|------|
| | Отлично | Хорошо | Удовл. | Неуд. | |
| Письменное домашнее задание | Правильно выполнены все задания. Продемонстрирован высокий уровень владения материалом. Проявлены превосходные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. | Правильно выполнена большая часть заданий. Присутствуют незначительные ошибки. Продемонстрирован хороший уровень владения материалом. Проявлены средние способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. | Задания выполнены более чем наполовину. Присутствуют серьезные ошибки. Продемонстрирован удовлетворительный уровень владения материалом. Проявлены низкие способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. | Задания выполнены менее чем наполовину. Продемонстрирован неудовлетворительный уровень владения материалом. Проявлены недостаточные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. | 1 |
| Устный опрос | В ответе качественно раскрыто содержание темы. Ответ хорошо структурирован. Прекрасно освоен понятийный аппарат. Продемонстрирован высокий уровень понимания материала. Превосходное умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения. | Основные вопросы темы раскрыты. Структура ответа в целом адекватна теме. Хорошо освоен понятийный аппарат. Продемонстрирован хороший уровень понимания материала. Хорошее умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения. | Тема частично раскрыта. Ответ слабо структурирован. Понятийный аппарат освоен частично. Понимание отдельных положений из материала по теме. Удовлетворительное умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения. | Тема не раскрыта. Понятийный аппарат освоен неудовлетворительно. Понимание материала фрагментарное или отсутствует. Неумение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения. | 2 |
| Презентация | Превосходный уровень владения материалом. Высокий уровень доказательности, наглядности, качества преподнесения информации. Степень полноты раскрытия материала и использованные решения полностью соответствуют задачам презентации. Используются надлежащие источники и методы. | Хороший уровень владения материалом. Средний уровень доказательности, наглядности, качества преподнесения информации. Степень полноты раскрытия материала и использованные решения в основном соответствуют задачам презентации. Используются источники и методы в основном соответствуют поставленным задачам. | Удовлетворительный уровень владения материалом. Низкий уровень доказательности, наглядности, качества преподнесения информации. Степень полноты раскрытия материала и использованные решения слабо соответствуют задачам презентации. Используются источники и методы частично соответствуют поставленным задачам. | Неудовлетворительный уровень владения материалом. Неудовлетворительный уровень доказательности, наглядности, качества преподнесения информации. Степень полноты раскрытия материала и использованные решения не соответствуют задачам презентации. Используются источники и методы не соответствуют поставленным задачам. | 3 |

| Форма контроля | Критерии оценивания | | | | Этап |
|----------------|---|---|---|---|------|
| | Отлично | Хорошо | Удовл. | Неуд. | |
| Экзамен | Обучающийся обнаружил всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоил основную литературу и знаком с дополнительной литературой, рекомендованной программой дисциплины, усвоил взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, проявил творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала. | Обучающийся обнаружил полное знание учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные программой задания, усвоил основную литературу, рекомендованную программой дисциплины, показал систематический характер знаний по дисциплине и способен к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности. | Обучающийся обнаружил знание основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, справился с выполнением заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой дисциплины, допустил погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя. | Обучающийся обнаружил значительные пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустил принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий и не способен продолжить обучение или приступить по окончании университета к профессиональной деятельности без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине. | |

6.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Семестр 3

Текущий контроль

1. Письменное домашнее задание

Темы 1, 2, 3, 4

Студентам предлагается самостоятельно выбрать из дополнительной литературы экстремальные задачи по соответствующей теме, подробно разобрать, записать решение и презентовать на аудиторных занятиях.

Примеры задач на самостоятельное решение:

1. Внутри окружности с центром O дана точка A , отличная от O . Найдите на окружности точку M , для которой угол AMO наибольший.
2. Дана прямая s и две точки A и B , лежащие по разные стороны от этой прямой. Требуется найти такую точку C на прямой s , чтобы модуль разности $|AC - CB|$ был наибольшим.
3. Через точку C внутри угла проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник наибольшей площади.
4. Докажите, что среди всех треугольников ABC с фиксированным углом A и площадью S наименьшую длину стороны BC имеет равнобедренный треугольник с основанием BC .
5. Докажите, что среди всех треугольников ABC с данными стороной $BC = a$ и высотой, проведенной к этой стороне, наибольшую величину угла A имеет равнобедренный треугольник.
6. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин была бы наибольшей.
7. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка X ; M и N — ее проекции на катеты AC и BC . При каком положении точки X длина отрезка MN будет наименьшей? При каком положении точки X площадь четырехугольника $CMXN$ будет наибольшей?
8. Рассмотрим все остроугольные треугольники ABC с заданными стороной a и углом A . Чему равен максимум суммы квадратов длин сторон b и c .
9. Из точки M , лежащей на стороне AB остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны BC и AC . При каком положении точки M длина отрезка PQ минимальна?
10. На основании AD трапеции $ABCD$ дана точка K . Найдите на основании BC точку M , для которой площадь общей части треугольников AMD и BKC максимальна.
11. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

12. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n прямыми?
13. На плоскости проведено n прямых. Найдите максимальное число треугольников со сторонами на этих прямых.
14. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n окружностей?
15. На плоскости задано n точек, из которых r лежат на одной прямой, а кроме них никакие три точки не лежат на одной прямой. Найдите максимальное число треугольников с вершинами в этих точках.

2. Устный опрос

Темы 1, 2, 3, 4

В начале каждого занятия проводится актуализация знаний, необходимых для доказательства теорем и решения задач.

Студенты должны вспомнить определения и теоремы планиметрии, стереометрии, преобразования алгебраических уравнений и неравенств.

3. Презентация

Темы 1, 2, 3, 4

Студентам предлагается самостоятельно выбрать из дополнительной литературы экстремальные задачи по соответствующей теме, подробно разобрать, записать решение и презентовать на аудиторных занятиях.

Презентация решения задачи должна быть представлена четко, ясно, чертеж к задаче желателен выполнен в программе GeoGebra. Выступающий студент должен свободно отвечать на вопросы коллег и преподавателя.

Экзамен

Вопросы к экзамену:

Вопросы и задачи к экзамену по специальному курсу "Методы решения экстремальных задач"

1. На данной прямой с найти точку C , из которой данный отрезок AB виден под большим углом. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой s .
2. Внутри окружности с центром O дана точка A , отличная от O . Найдите на окружности точку M , для которой угол AMO наибольший.
3. Задача Герона. На плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой точку M , для которой сумма $AM + BM$ наименьшая.
4. Внутри угла со сторонами a и b даны точки M и K . Требуется найти такие точки A и B на сторонах этого угла, чтобы длина ломаной $MAKB$ была наименьшей.
5. Дана прямая s и две точки A и B , лежащие по разные стороны от этой прямой. Требуется найти такую точку C на прямой s , чтобы модуль разности $|AC - CB|$ был наибольшим.
6. Задача и теорема Фаньяно. Вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника. Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник.
7. Населенные пункты A и D расположены на противоположных берегах реки ширины h . В каком месте реки следует построить мост BC , чтобы путь $AB + BC + CD$ имел наименьшую длину? (Берега b и c реки параллельные, мост строится перпендикулярно берегам).
8. Теорема Ферма-Торричелли-Штейнера. Если все углы треугольника меньше 120° , то точкой минимума суммы расстояний до его вершин является точка Торричелли. Если же один из углов больше или равен 120° , то такой точкой является вершина этого угла.
9. Какая наибольшая сторона может быть у правильного треугольника, помещающегося в единичном квадрате.
10. Через точку C внутри угла проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади.
11. Из точки M описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и AC . При каком положении точки M длина отрезка PQ максимальна?
12. Докажите, что среди всех треугольников ABC с фиксированным углом A и площадью S наименьшую длину стороны BC имеет равнобедренный треугольник с основанием BC .
13. Докажите, что среди всех треугольников ABC с данной стороной $BC = a$ и высотой, проведенной к этой стороне, наибольшую величину угла A имеет равнобедренный треугольник.
14. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин была бы наименьшей.
15. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка X ; M и N — ее проекции на катеты AC и BC . При каком положении точки X длина отрезка MN будет наименьшей? При каком положении точки X площадь четырехугольника $CMXN$ будет наибольшей?
16. Рассмотрим все остроугольные треугольники ABC с заданными стороной a и углом A . Чему равен максимум суммы квадратов длин сторон b и c .
17. Из точки M , лежащей на стороне AB остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны BC и AC . При каком положении точки M длина отрезка PQ минимальна?
18. На основании AD трапеции $ABCD$ дана точка K . Найдите на основании BC точку M , для которой площадь общей части треугольников AMD и BKC максимальна.
19. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?
20. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n прямыми?
21. На плоскости проведено n прямых. Найдите максимальное число треугольников со сторонами на этих прямых.
22. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей?
23. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n окружностей?

24. На окружности отмечено n точек. Найдите наибольшее число различных треугольников, вписанных в эту окружность, вершинами которых служат данные точки?
25. На плоскости задано n точек, из которых r лежат на одной прямой, а кроме них никакие три точки не лежат на одной прямой. Найдите максимальное число треугольников с вершинами в этих точках.
26. Найдите наибольшее число треугольников, вершины которых совпадают с вершинами данного выпуклого n -угольника, но стороны не совпадают со сторонами этого n -угольника.
27. Дана плоскость и две точки A и B , не принадлежащие на этой плоскости. Требуется найти такую точку C на плоскости, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей.
28. Внутри двугранного угла дана точка C . Требуется найти такие точки A и B на гранях этого угла, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.
29. Найдите наименьшее расстояние между точками ребра AB и точками ребра CD единичного правильного тетраэдра.
30. Найдите точки правильного тетраэдра $ABCD$, из которых ребро AB видно под наименьшим углом. Чему равен этот угол?
31. Найдите наименьшее расстояние между точками диагонали AB_1 и точками диагонали BC_1 граней единичного куба.
32. Найдите точки куба $AB_1C_1D_1$, из которых: а) ребро AB видно под наименьшим углом; б) отрезок AC виден под наименьшим углом; в) диагональ AC_1 видна под наименьшим углом. Чему равен этот угол?
33. На сфере даны две точки A и B . Найдите на этой сфере точки C и D , из которых отрезок AB виден под наибольшим и наименьшим углом, соответственно.
34. Найдите путь по поверхности единичного куба $AB_1C_1D_1$ из вершины A в вершину C_1 наименьшей длины.
35. На ребре куба сидит муха. Она хочет проползти по каждой его грани и вернуться в исходную точку. Укажите кратчайший путь мухи и найдите его длину, если ребро куба равно 1.
36. Какое наибольшее ребро может быть у правильного тетраэдра, помещающегося в единичном кубе?
37. Какое наибольшее ребро может быть у октаэдра, помещающегося в единичном тетраэдре?
38. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, наибольшей площади боковой поверхности, вписанного в сферу радиуса R .
39. Из точки X , лежащей внутри правильного тетраэдра $ABCD$, опущены перпендикуляры XA_1 , XB_1 , XC_1 и XD_1 на его грани. Докажите, что сумма $XA_1 + XB_1 + XC_1 + XD_1$ не зависит от выбора точки X .
40. Пусть R и r - соответственно радиусы описанного и вписанного шаров некоторого тетраэдра. Доказать, что $R \geq 3r$.

6.4 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

В КФУ действует балльно-рейтинговая система оценки знаний обучающихся. Суммарно по дисциплине (модулю) можно получить максимум 100 баллов за семестр, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов.

Для зачёта:

56 баллов и более - "зачтено".

55 баллов и менее - "не зачтено".

Для экзамена:

86 баллов и более - "отлично".

71-85 баллов - "хорошо".

56-70 баллов - "удовлетворительно".

55 баллов и менее - "неудовлетворительно".

| Форма контроля | Процедура оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций | Этап | Количество баллов |
|-----------------------------|--|------|-------------------|
| Семестр 3 | | | |
| Текущий контроль | | | |
| Письменное домашнее задание | Обучающиеся получают задание по освещению определённых теоретических вопросов или решению задач. Работа выполняется письменно дома и сдаётся преподавателю. Оцениваются владение материалом по теме работы, аналитические способности, владение методами, умения и навыки, необходимые для выполнения заданий. | 1 | 20 |
| Устный опрос | Устный опрос проводится на практических занятиях. Обучающиеся выступают с докладами, сообщениями, дополнениями, участвуют в дискуссии, отвечают на вопросы преподавателя. Оценивается уровень домашней подготовки по теме, способность системно и логично излагать материал, анализировать, формулировать собственную позицию, отвечать на дополнительные вопросы. | 2 | 10 |

| Форма контроля | Процедура оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций | Этап | Количество баллов |
|----------------|--|------|-------------------|
| Презентация | Обучающиеся выполняют презентацию с применением необходимых программных средств, решая в презентации поставленные преподавателем задачи. Обучающийся выступает с презентацией на занятии или сдает её в электронном виде преподавателю. Оцениваются владение материалом по теме презентации, логичность, информативность, способы представления информации, решение поставленных задач. | 3 | 20 |
| Экзамен | Экзамен нацелен на комплексную проверку освоения дисциплины. Экзамен проводится в устной или письменной форме по билетам, в которых содержатся вопросы (задания) по всем темам курса. Обучающемуся дается время на подготовку. Оценивается владение материалом, его системное освоение, способность применять нужные знания, навыки и умения при анализе проблемных ситуаций и решении практических заданий. | | 50 |

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

7.1 Основная литература:

- Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия) [Электронный ресурс] : учебное пособие / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2015. - 256 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72005>
- Основы комбинаторики и теории чисел. Сборник задач [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Глибичук А.А., Ильинский Д.В., Мусатов А.М. и др. - Долгопрудный: Интеллект, 2015. - 104 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/538904>

7.2. Дополнительная литература:

- Протасов, В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. [Электронный ресурс] : учеб. пособие - Электрон. дан. - М. : МЦНМО, 2005. - 56 с. - Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/9398>
- Прасолов, В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. [Электронный ресурс] : учеб. пособие - Электрон. дан. - М. : МЦНМО, 2007. - 608 с. - Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/9389>
- Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. - Электрон. дан. - М.: Физматлит, 2001. - 480 с. - Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/59283>
- Алфутова, Н.Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. - Электрон. дан. - М.: МЦНМО, 2009. - 336 с. - Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/9279>
- Баранов, В.И. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Баранов, Б.С. Стечкин. - Электрон. дан. - М.: Физматлит, 2006. - 240 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2721>

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

- Большая научная библиотека - <http://sci-lib.com/subject.php?subject=1&pp=10>
 Общероссийский математический портал Math-Net.Ru. - <http://www.mathnet.ru/>
 Публичная электронная библиотека - <http://www.plib.ru/library/subcategory/32.html>

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

| Вид работ | Методические рекомендации |
|----------------------|--|
| практические занятия | Приступая к изучению новой учебной дисциплины, необходимо ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, завести новую тетрадь для выполнения практических заданий. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения изучения нового материала, разрешения спорных ситуаций. В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Выполнять практические задания, выдаваемые преподавателем. Подготовку к практическим занятиям осуществлять в соответствии с рекомендациями, изложенными в методических разработках. |

| Вид работ | Методические рекомендации |
|-----------------------------|--|
| самостоятельная работа | Самостоятельная работа включает в себя самостоятельное решение задач по каждой теме и устное представление решений задач на практических занятиях в аудитории. В соответствии с каждой темой обучаемым предлагается перечень задач и теорем для самостоятельного решения с дальнейшим его обсуждением. При решении задач следует придерживаться рекомендаций преподавателя. |
| письменное домашнее задание | Для самостоятельного решения задач необходимо провести качественный анализ условия задачи (построить точный динамический чертеж (можно в программе GeoGebra), либо использовать неполную индукцию и др.), выдвинут гипотезу о методе решения задачи, далее доказать либо ее истинность, либо доказать ее несостоятельность. После доказательства задачи необходимо подробно в письменной форме оформить ее решение в тетради. |
| устный опрос | Опрос осуществляется преподавателем в начале занятия для актуализации понятий и способов действий, необходимых для изучения новых подходов в решении задач. Для того чтобы занятие было продуктивным, преподаватель предлагает в конце предыдущего занятия список понятий необходимых для повторения. Наиболее активные студенты, участвующие в актуализации, получают дополнительные баллы. |
| презентация | Опрос осуществляется по разбору оригинальных решений задач, выполненных самостоятельно обучаемым во внеаудиторное время. Решение должно иметь четкую логику и рассказано обучаемым на высоком методическом и математическом уровне. Решения отдельных задач остальные обучаемые по рекомендации преподавателя могут быть записаны в тетрадях. |
| экзамен | При подготовке к экзамену повторять пройденный материал в строгом соответствии с учебной программой, примерным перечнем учебных вопросов. Использовать материалы, обсуждаемые на практических занятиях, литературу, рекомендованную преподавателем. Обратит особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных студентом по разным причинам. При необходимости обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю. |

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Освоение дисциплины "Методы решения экстремальных задач" предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Браузер Mozilla Firefox
 Браузер Google Chrome
 Adobe Reader XI

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Освоение дисциплины "Методы решения экстремальных задач" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе Анализ на многообразиях.