

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Факультет математики и естественных наук



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Д.А. Гаурский

ДЕПАРТАМЕНТ  
МАТЕМАТИКИ И  
ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК  
(ДО КФУ)

» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Теория функций действительных переменных Б1.В.ОД.11

Направление подготовки: 44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: Математика и физика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Миронов А.Н. , Миронова Л.Б.

**Рецензент(ы):**

Анисимова Т.И.

### **СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Анисимова Т. И.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Елабужского института КФУ (Факультет математики и естественных наук):

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 1016761418

Казань

2018

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (доцент) Миронов А.Н. Кафедра математики и прикладной информатики Факультет математики и естественных наук , ANMironov@kpfu.ru ; доцент, к.н. (доцент) Миронова Л.Б. Кафедра математики и прикладной информатики Факультет математики и естественных наук , lbmironova@yandex.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен:

знать:

- основные понятия теории функций действительного переменного (функция, мера, интеграл);
- знать основные факты (теоремы, свойства) теории функций и функционального анализа;
- основные методы теории функций действительного переменного;
- современные направления развития теории функций действительного переменного;

уметь:

- используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями курса;
- вычислять меру и мощность множеств на числовой прямой, интегралы Лебега;
- точно и лаконично описывать решение задач;

владеть:

- основными положениями классических разделов теории функций действительного переменного,
- базовыми понятиями и методами теории функций действительного переменного;
- системой основных математических структур и аксиоматическим методом.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ОД.11 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) и относится к обязательным дисциплинам. Осваивается на 4 курсе, 7 семестр.

Дисциплина 'Действительный анализ' относится к вариативной части блока Б1 (Б1.В.ОД.9).

Для освоения дисциплины используются знания, умения, навыки, способы деятельности и установки, полученные и сформированные в ходе изучения следующих дисциплин: 'Математический анализ', 'Алгебра', 'Аналитическая геометрия'.

Освоение данной дисциплины является основой для последующего изучения курсов по выбору студентов и итоговой аттестации.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-4 (профессиональные компетенции)	способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов
ОК-6	способность к самоорганизации и самообразованию

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

- основные понятия теории функций действительного переменного (функция, мера, интеграл);
- знать основные факты (теоремы, свойства) теории функций и функционального анализа;
- основные методы теории функций действительного переменного;
- современные направления развития теории функций действительного переменного

2. должен уметь:

- используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями курса;
- вычислять меру и мощность множеств на числовой прямой, интегралы Лебега;
- точно и лаконично описывать решение задач

3. должен владеть:

- основными положениями классических разделов теории функций действительного переменного,
- базовыми понятиями и методами теории функций действительного переменного;
- системой основных математических структур и аксиоматическим методом

4. должен демонстрировать способность и готовность:

применять результаты освоения дисциплины в профессиональной деятельности

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 7 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Мощность множества	7	1-3	6	6	0	
2.	Тема 2. Множества на числовой прямой	7	4-6	4	4	0	
3.	Тема 3. Мера Лебега	7	7-9	4	4	0	
4.	Тема 4. Интеграл Лебега	7	10-14	6	6	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
5.	Тема 5. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве	7	15-16	2	2	0	
	Тема . Итоговая форма контроля	7		0	0	0	Экзамен
	Итого			22	22	0	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Мощность множества

#### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Понятие множества, сравнение мощностей. Счетные множества. Теоремы о счетности или конечности подмножества счетного множества, счетности объединения конечного или счетного множества счетных множеств, о возможности выделения счетного подмножества из всякого бесконечного множества, об эквивалентности бесконечного несчетного множества своей части, полученной из него удалением конечной или счетной части. Счетность множества рациональных чисел и множества алгебраических чисел. Несчетность множества действительных чисел, примеры множеств мощности континуума. Теоремы о мощности множества подмножеств, о равенстве мощности континуума, мощности множества подмножеств счетного множества, о мощности промежуточного множества, а также теорема Кантора-Бернштейна.

#### **практическое занятие (6 часа(ов)):**

Понятие множества, сравнение мощностей. Счетные множества. Теоремы о счетности или конечности подмножества счетного множества, счетности объединения конечного или счетного множества счетных множеств, о возможности выделения счетного подмножества из всякого бесконечного множества, об эквивалентности бесконечного несчетного множества своей части, полученной из него удалением конечной или счетной части. Счетность множества рациональных чисел и множества алгебраических чисел. Несчетность множества действительных чисел, примеры множеств мощности континуума. Теоремы о мощности множества подмножеств, о равенстве мощности континуума, мощности множества подмножеств счетного множества, о мощности промежуточного множества, а также теорема Кантора-Бернштейна.

### Тема 2. Множества на числовой прямой

#### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Теоремы о строении открытых и замкнутых множеств. Понятие совершенного множества, совершенное множество Кантора.

#### **практическое занятие (4 часа(ов)):**

Теоремы о строении открытых и замкнутых множеств. Понятие совершенного множества, совершенное множество Кантора.

### Тема 3. Мера Лебега

#### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Мера Лебега для открытых и замкнутых линейных множеств. Внешняя мера и внутренняя мера ограниченного множества. Мера Лебега. Теоремы об измеримых множествах: измеримость дополнения, объединения и пересечения конечного числа измеримых множеств, счетная аддитивность меры. Понятие функции, измеримой по Лебегу и теоремы об измеримых функциях. Измеримость предельной функции, обобщение этого результата в случае сходимости почти всюду. Теорема Егорова и теорема Лузина.

#### **практическое занятие (4 часа(ов)):**

Мера Лебега для открытых и замкнутых линейных множеств. Внешняя мера и внутренняя мера ограниченного множества. Мера Лебега. Теоремы об измеримых множествах: измеримость дополнения, объединения и пересечения конечного числа измеримых множеств, счетная аддитивность меры. Понятие функции, измеримой по Лебегу и теоремы об измеримых функциях. Измеримость предельной функции, обобщение этого результата в случае сходимости почти всюду.

#### **Тема 4. Интеграл Лебега**

##### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Определение интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции как предел интегральных сумм. Свойства сумм Лебега, существование интеграла от ограниченной измеримой функции. Теорема о среднем и ее следствия. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Восстановление первообразной для ограниченной функции. Интеграл произвольной неотрицательной измеримой функции и основные свойства интеграла. Суммируемые функции.

##### **практическое занятие (6 часа(ов)):**

Определение интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции как предел интегральных сумм. Свойства сумм Лебега, существование интеграла от ограниченной измеримой функции. Теорема о среднем и ее следствия. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Восстановление первообразной для ограниченной функции. Интеграл произвольной неотрицательной измеримой функции и основные свойства интеграла. Суммируемые функции.

#### **Тема 5. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве**

##### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Понятие гильбертова пространства. Определение ряда Фурье по ортогональной системе векторов гильбертова пространства. Неравенство Бесселя и эквивалентность полноты и замкнутости ортонормированной системы векторов в гильбертовом пространстве. Полнота тригонометрической системы функций.

##### **практическое занятие (2 часа(ов)):**

Понятие гильбертова пространства. Определение ряда Фурье по ортогональной системе векторов гильбертова пространства. Неравенство Бесселя и эквивалентность полноты и замкнутости ортонормированной системы векторов в гильбертовом пространстве. Полнота тригонометрической системы функций.

### **4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Мощность множества	7	1-3	Домашнее задание	6	Опрос
2.	Тема 2. Множества на числовой прямой	7	4-6	Домашнее задание	4	Опрос
3.	Тема 3. Мера Лебега	7	7-9	Домашнее задание	4	Опрос
4.	Тема 4. Интеграл Лебега	7	10-14	Домашнее задание	6	Опрос
5.	Тема 5. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве	7	15-16	Домашнее задание	8	Опрос
	Итого				28	

### **5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения**

В преподавании дисциплины используются следующие образовательные технологии:

Информационные технологии - обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам (теоретически к неограниченному объему и скорости доступа), увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки и объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

Проблемное обучение - стимулирование студентов к самостоятельному приобретению знаний, необходимых для решения конкретной проблемы.

Контекстное обучение - мотивация студентов к усвоению знаний путем выявления связей между конкретным знанием и его применением.

Междисциплинарное обучение - использование знаний из разных областей, их группировка и концентрация в контексте решаемой задачи.

Опережающая самостоятельная работа - изучение студентами нового материала до его изучения в ходе аудиторных занятий.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Мощность множества**

Опрос , примерные вопросы:

1.Понятие мощности множества. 2.Существование сколь угодно высоких мощностей. 3.Счетные множества. 4.Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел. 5.Мощность континуума.

### **Тема 2. Множества на числовой прямой**

Опрос , примерные вопросы:

1. Строение линейных открытых и замкнутых множеств. 2. Совершенные множества. 3. Множество Кантора.

### **Тема 3. Мера Лебега**

Опрос , примерные вопросы:

1. Мера ограниченных открытого и замкнутого множеств. 2. Внешняя и внутренняя меры. 3. Мера Лебега. 4. Измеримые функции. 5. Последовательности измеримых функций.

### **Тема 4. Интеграл Лебега**

Опрос , примерные вопросы:

1. Определение и существование интеграла Лебега. 2. Свойства интеграла Лебега. 3. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. 4. Сравнение интегралов Римана и Лебега. 5. Восстановление первообразной. 6. Суммируемые функции. 7. Пространства  $L_1$  и  $L_2$ .

### **Тема 5. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве**

Опрос, примерные вопросы:

1. Ортогональные системы и базисы в гильбертовых пространствах. 2. Ряд Фурье по ортогональной системе векторов.

### **Итоговая форма контроля**

экзамен

Примерные вопросы к экзамену:

1. Понятие мощности множества.
2. Существование сколь угодно высоких мощностей.
3. Счетные множества.
4. Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел.
5. Мощность континуума.

6. Строение линейных открытых и замкнутых множеств.
7. Совершенные множества.
8. Множество Кантора.
9. Мера ограниченных открытого и замкнутого множеств.
10. Внешняя и внутренняя меры.
11. Мера Лебега.
12. Измеримые функции.
13. Последовательности измеримых функций.
14. Определение и существование интеграла Лебега.
15. Свойство интеграла Лебега.
16. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
17. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
18. Восстановление первообразной.
19. Суммируемые функции.
20. Пространства  $L_1$  и  $L_2$ .
21. Ортогональные системы и базисы в гильбертовых пространствах.
22. Ряд Фурье по ортогональной системе векторов.

### 7.1. Основная литература:

1. Смолин, Ю. Н. Введение в теорию функций действительной переменной [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Ю. Н. Смолин. - М.: ФЛИНТА, 2012. - 517 с. URL: <http://znanium.com/bookread2.php?book=457005>
2. Филимоненкова, Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.В. Филимоненкова. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург: Лань, 2015. - 176 с. - URL: <https://e.lanbook.com/reader/book/64343/#1>
3. Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учебник / А.Я. Хелемский. - Электрон. дан. - Москва: МЦНМО, 2014. - 560 с. - URL: <https://e.lanbook.com/reader/book/56415/#1>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. - Электрон. дан. - Москва: Физматлит, 2005. - 240 с. - URL: <https://e.lanbook.com/reader/book/2342/#1>
2. Ульянов, П.Л. Действительный анализ в задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие / П.Л. Ульянов. - Электрон. дан. - Москва: Физматлит, 2005. - 416 с. - URL: <https://e.lanbook.com/reader/book/2353/#1>
3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - Электрон. дан. - Москва: Физматлит, 2009. - 572 с. - URL: <https://e.lanbook.com/reader/book/2206/#1>

### 7.3. Интернет-ресурсы:

- Бесплатный ресурс для студентов - <http://math24.ru/calculus-list.html>  
Мир математических уравнений - <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>  
Образовательный математический сайт Exponenta.ru - <http://www.exponenta.ru/default.asp>  
Общероссийский математический портал - <http://www.mathnet.ru/>  
Учебные материалы - <http://math.fizteh.ru/study/>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)



Освоение дисциплины "Теория функций действительных переменных" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Интерактивная доска.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 44.03.05 "Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)" и профилю подготовки Математика и физика .

Автор(ы):

Миронов А.Н. \_\_\_\_\_

Миронова Л.Б. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Анисимова Т.И. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.