

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Д.А. Гаурский

ДЕПАРТАМЕНТ  
ОБРАЗОВАНИЯ  
(ДО КФУ)

» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Уравнения математической физики Б1.Б.16

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Карчевский М.М. , Федотов Е.М.

**Рецензент(ы):**

Бадриев И.Б.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 940718

Казань  
2018

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Карчевский М.М. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики , mikhail.Karchevsky@kpfu.ru ; Федотов Е.М.

### 1. Цели освоения дисциплины

Излагаются основные понятия и методы построения математических моделей простейших физических процессов, методы исследования корректности граничных задач для классических уравнений математической физики, основные методы построения точных решений задач математической физики.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.Б.16 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 3 курсе, 5, 6 семестры.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 3 курсе в 5 и 6 семестрах для студентов обучающихся по направлению 'Прикладная математика и информатика'. Существенно используется материал общих курсов: 'Математический анализ', 'Алгебра и геометрия', 'Дифференциальные уравнения'.

Основная цель курса - сообщить материал, необходимый при построении математических моделей типичных физических процессов, исследовании их свойств, построении и исследовании аналитических решений. Материал курса используется при изучении общего курса 'Численные методы'.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции                        | Расшифровка приобретаемой компетенции   |
|---|---|
| ОПК-1<br>(профессиональные компетенции) | способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой |
| ПК-2<br>(профессиональные компетенции)  | способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат  |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

такие разделы теории уравнений с частными производными, которые традиционно используются при построении и исследовании математических моделей механики, физики, техники, биологии.

2. должен уметь:

применять, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным проблемам.

3. должен владеть:

навыками постановок задач из различных областей знаний в виде уравнений в частных производных, приемами анализа и решения основных уравнений математической физики.

4. должен продемонстрировать способность и готовность:

применять на практике полученные при изучении курса теоретические знания в области задач математической физики и навыки при решении учебно-методических задач и упражнений.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных(ые) единиц(ы) 288 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 5 семестре; экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля |
|----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---------------------------|
|    |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                           |
| 1. | Тема 1.<br>Классификация<br>линейных уравнений с<br>частными<br>производными второго<br>порядка. Приведение<br>к каноническому виду<br>уравнений второго<br>порядка с<br>постоянными<br>коэффициентами.<br>Классификация<br>линейных уравнений с<br>частными<br>производными второго<br>порядка. Приведение<br>к каноническому виду<br>уравнений второго<br>порядка с<br>постоянными<br>коэффициентами. | 5       | 1                  | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 2. | Тема 2. Приведение к<br>каноническому виду<br>уравнений второго<br>порядка с двумя<br>независимыми<br>переменными.  | 5       | 2                  | 2   | 0                       | 2                      |                           |

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля |
|----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---------------------------|
|    |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                           |
| 3. | Тема 3. Вывод основных уравнений математической физики: уравнение колебаний струны, уравнение колебаний мембраны, уравнение колебаний стержня, уравнение теплопроводности в твердом теле, уравнение теплопроводности стержня, примеры стационарных уравнений. | 5       | 3,4                | 4   | 0                       | 4                      |                           |
| 4. | Тема 4. Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Колебания полуограниченной струны.  | 5       | 5                  | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 5. | Тема 5. Решение однородного уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Анализ решения задачи о свободных колебаниях струны.  | 5       | 6                  | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 6. | Тема 6. Обоснование метода Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны.  | 5       | 7                  | 2   | 0                       | 2                      |                           |

| N   | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля |
|-----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---------------------------|
|     |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                           |
| 7.  | Тема 7. Метод разделения переменных решения задачи о вынужденных колебаниях струны. Явление резонанса.<br>Метод разделения переменных решения задачи о свободных колебаниях прямоугольной мембраны. | 5       | 8                  | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 8.  | Тема 8. Теорема единственности решения основных граничных задач для волнового уравнения.  | 5       | 9                  | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 9.  | Тема 9. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.   | 5       | 10                 | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 10. | Тема 10. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.  | 5       | 11                 | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 11. | Тема 11. Формула Пуассона решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения (метод спуска)   | 5       | 12                 | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 12. | Тема 12. Теорема о единственности решения основных краевых задач для уравнения теплопроводности.  | 5       | 13                 | 2   | 0                       | 2                      |                           |
| 13. | Тема 13. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности стержня.  | 5       | 14                 | 2   | 0                       | 2                      |                           |

| N   | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля   |
|-----|--|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|-----------------------------|
|     |  |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                             |
| 14. | Тема 14. Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности стержня. Анализ полученного решения. Квазистационарный режим остывания стержня. | 5       | 15                 | 2   | 0                       | 2                      |                             |
| 15. | Тема 15. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.                    | 5       | 16                 | 2   | 0                       | 2                      |                             |
| 16. | Тема 16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье.   | 5       | 17                 | 2   | 0                       | 2                      |                             |
| 17. | Тема 17. Обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.  | 5       | 18                 | 2   | 0                       | 2                      |                             |
| 18. | Тема 18. Основные граничные задачи для эллиптического уравнения. Исследование единственности решения основных граничных.                         | 6       | 1                  | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание |
| 19. | Тема 19. Гармонические функции. Формулы Грина. Основные свойства. Теоремы о среднем для гармонической функции.                                   | 6       | 2,3                | 4   | 0                       | 4                      | Письменное домашнее задание |

| N   | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля                         |
|-----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---|
|     |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |   |
| 20. | Тема 20. Принцип максимума для гармонической функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление гармонической функции.                        | 6       | 4,5                | 4   | 0                       | 4                      | Письменное домашнее задание                       |
| 21. | Тема 21. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения.  | 6       | 6                  | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание                       |
| 22. | Тема 22. Метод функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа: определение функции Грина и ее основные свойства.  | 6       | 7                  | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание                       |
| 23. | Тема 23. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для шара методом функции Грина (формула Пуассона).   | 6       | 8,9                | 4   | 0                       | 4                      | Письменное домашнее задание                       |
| 24. | Тема 24. Поведение гармонической функции и ее производных на бесконечности. Исследование единственности решения внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа. | 6       | 10                 | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание                       |
| 25. | Тема 25. Метод разделения переменных решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области.   | 6       | 11                 | 2   | 0                       | 2                      | Контрольная работа<br>Письменное домашнее задание |

| N   | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля                         |
|-----|--|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---|
|     |  |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |   |
| 26. | Тема 26. Метод разделения переменных решения внутренней и внешней задач Дирихле для круга методом разделения переменных. Формула Пуассона. | 6       | 12                 | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание                       |
| 27. | Тема 27. Потенциалы простого и двойного слоя, гармонические функции. Геометрические свойства поверхности Ляпунова.                         | 6       | 13,14              | 4   | 0                       | 4                      | Письменное домашнее задание                       |
| 28. | Тема 28. Прямое значение потенциала двойного слоя. Интеграл Гаусса.  | 6       | 15                 | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание                       |
| 29. | Тема 29. Предельные значения потенциала двойного слоя.   | 6       | 16                 | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание                       |
| 30. | Тема 30. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.   | 6       | 17                 | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание                       |
| 31. | Тема 31. Интегральные уравнения теории потенциала.   | 6       | 18                 | 2   | 0                       | 2                      | Письменное домашнее задание<br>Контрольная работа |
| ·   | Тема . Итоговая форма контроля   | 5       |                    | 0   | 0                       | 0                      | Зачет   |
| ·   | Тема . Итоговая форма контроля   | 6       |                    | 0   | 0                       | 0                      | Экзамен   |
|     | Итого  |         |                    | 72  | 0                       | 72                     |   |

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Линейные уравнения второго порядка. Виды уравнений. Замена переменных в уравнениях второго порядка, матрица коэффициентов при старшей части. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. Примеры уравнений математической физики с их классификацией.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Классификация и приведение уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами к каноническому виду. Связь с приведением квадратичных форм к нормальному виду. Метод Лагранжа. Построение переменных для сведения уравнений к каноническому виду.

**Тема 2. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Классификация уравнений с двумя независимыми переменными. Дискриминант уравнения, связь с типом уравнения. Выбор переменных, для сведения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение задач на классификацию уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Уравнения переменного типа. Выбор замены переменных в случаях различных типов уравнения в подобластях. Упрощение уравнений.

**Тема 3. Вывод основных уравнений математической физики: уравнение колебаний струны, уравнение колебаний мембраны, уравнение колебаний стержня, уравнение теплопроводности в твердом теле, уравнение теплопроводности стержня, примеры стационарных уравнений.**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Основы вывода уравнений математической физики. Гипотезы, физические законы, законы сохранения. Вывод уравнения колебаний струны, стержней, уравнение колебаний мембраны. Начально-краевые задачи для уравнений колебаний. Вывод уравнения теплопроводности в твердом теле, уравнения теплопроводности в стержне. Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Примеры стационарных краевых задач уравнений.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Вывод начально-краевых задач для уравнения поперечных колебаний струны, уравнения колебаний мембраны, продольных колебаний стержня. Учёт неоднородностей и сосредоточенных факторов. Вывод начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в твердом теле. Двумерные и одномерные тепловые задачи. Учёт неоднородности и сосредоточенных факторов.

**Тема 4. Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Колебания полуограниченной струны.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Задача Коши для одномерного уравнения колебаний. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Сведение задачи о колебаниях полуограниченной струны к задаче Коши. Интерпретация решения задачи. Волновые процессы.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Применение формулы Даламбера к решению задач Коши для уравнения колебаний струн, стержней. Колебания полуограниченной струны. Графическое представление динамики развития волновых процессов на основе полученного решения.

**Тема 5. Решение однородного уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Анализ решения задачи о свободных колебаниях струны.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Задачи в ограниченных областях, одномерный случай. Решение однородного уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Построение решения задачи. Интерпретация полученного решения. Стоячие волны. Амплитуда, частота, сдвиг фазы стоячей волны. Зависимость параметров от исходных данных.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решаются задачи о свободных поперечных колебаниях струн и продольных колебаниях стержней методом разделения переменных. Решение уравнения в частных производных к ОДУ второго порядка. Решение спектральных задач для одномерного оператора Лапласа с различными типами граничных условий.

### **Тема 6. Обоснование метода Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны.**

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Обосновывается формализм метода Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны. Исследуется поведение коэффициентов Фурье при различных требованиях на исходные данные задачи. Формулируются условия существования классического решения задачи для одномерного волнового уравнения.

#### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Методом разделения переменных проводится решение смешанных краевых задач для однородного волнового уравнения с использованием граничных условий Дирихле, Неймана, а также при наличии участков границы с третьим граничным условием. Интерпретация полученных решений.

### **Тема 7. Метод разделения переменных решения задачи о вынужденных колебаниях струны. Явление резонанса. Метод разделения переменных решения задачи о свободных колебаниях прямоугольной мембраны.**

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Задачи в ограниченных областях, одномерный случай. Решение неоднородного уравнения колебаний струны методом Фурье. Построение решения задачи. Этот метод применяется для частного случая, когда правая часть содержит собственные гармоники. Проявление явления резонанса.

#### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Методом Фурье проводится решение смешанных краевых задач для неоднородного волнового уравнения. В задачах встречаются граничные условия Дирихле, Неймана, а также третьи граничные условия. Интерпретация полученных решений.

### **Тема 8. Теорема единственности решения основных граничных задач для волнового уравнения.**

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Методом энергетических неравенств доказывается единственность решения смешанной граничной задачи для многомерного гиперболического уравнения дивергентного вида. Указывается на то, что основное энергетическое тождество является отражением закона сохранения полной энергии системы. Формулируется теорема о единственности решения.

#### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Методом Фурье проводится решение полностью неоднородных смешанных краевых задач для волнового уравнения. В задачах встречаются граничные условия Дирихле, Неймана, а также третьи граничные условия. Интерпретация полученных решений. Построение функций, снимающих неоднородность в граничных условиях.

### **Тема 9. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.**

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Доказывается единственность решения задачи Коши для многомерного волнового уравнения. Вводится понятие характеристического конуса. Устанавливается справедливость теоремы о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.

#### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Метод Фурье применяется для решения двумерного волнового уравнения на примере решения задачи о свободных колебаниях прямоугольной мембраны. Рассматриваются случаи частичной или полной неоднородности уравнений.

### **Тема 10. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.**

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Решается задача Коши для трехмерного волнового уравнения. Строятся частные решения уравнения, на основе которых выводится формула Кирхгофа (Пуассона) решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Строятся решения трехмерного волнового уравнения с использованием формулы Кирхгофа. Интерпретация полученных решений.

**Тема 11. Формула Пуассона решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения (метод спуска)**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Решается задача Коши для двумерного волнового уравнения. Формула Пуассона решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения получается методом понижения размерности задачи, методом спуска.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Строятся решения двумерного волнового уравнения с использованием формулы Пуассона. Интерпретация полученных решений в двумерном приближении.

**Тема 12. Теорема о единственности решения основных краевых задач для уравнения теплопроводности.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Методом энергетических неравенств исследуется единственность решения основных краевых задач для уравнения теплопроводности. При исследовании рассматривается смешанная краевая задача с участками границы с условиями Дирихле, Неймана и третьими граничными условиями. Формулируется теорема о единственности.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Для различных постановок граничных задач проверяются условия теоремы о единственности решения. Внимание уделяется всем типам краевых условий, включая условия третьего рода.

**Тема 13. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности стержня.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Задачи в ограниченных областях, одномерный случай. Решение однородного уравнения теплопроводности методом разделения переменных. Построение решения задачи. Интерпретация полученного решения.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Методом разделения переменных проводится решение смешанных краевых задач для уравнения теплопроводности стержня с использованием граничных условий Дирихле, Неймана, а также при наличии участков границы с третьим граничным условием. Интерпретация полученных решений.

**Тема 14. Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности стержня. Анализ полученного решения. Квазистационарный режим остывания стержня.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Обосновывается формализм метода Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности. Исследуется поведение коэффициентов Фурье при различных требованиях на исходные данные задачи. Формулируются условия существования классического решения задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Проводится анализ полученного решения. Квазистационарный режим остывания стержня.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Методом Фурье проводится решение смешанных краевых задач для неоднородного уравнения теплопроводности. В задачах встречаются граничные условия Дирихле, Неймана, а также третьи граничные условия. Интерпретация полученных решений.

**Тема 15. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Формулируется и доказывается утверждение, называемое принципом максимума для уравнения теплопроводности. Обсуждается физический смысл принципа и его варианты. Принцип максимума используется для доказательства единственности решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Проверяются условия теоремы о единственности решения краевых задач, которые затем решаются методом Фурье. Решение проводится для полностью неоднородных смешанных краевых задач для уравнения теплопроводности. В задачах встречаются граничные условия Дирихле, Неймана, а также третьи граничные условия. Интерпретация полученных решений.

**Тема 16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Для решение задачи Коши для уравнения теплопроводности используется методом разделения переменных, который здесь назван методом интеграла Фурье ввиду непрерывности спектра пространственного оператора.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение примеров, связанных с решением задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье, при различных начальных условиях.

**Тема 17. Обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Проводится обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности путем исследования сходимости соответствующих несобственных интегралов. Указывается на наличии факта о бесконечной скорости распространения тепла в данной модели.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Представление решений задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье с использованием формулы Пуассона. Вычисление производных высоких порядков от полученных решений.

**Тема 18. Основные граничные задачи для эллиптического уравнения. Исследование единственности решения основных граничных.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Методом энергетических неравенств исследуется единственность решения основных краевых задач для уравнения эллиптического типа дивергентного вида. При исследовании рассматривается смешанная краевая задача с участками границы с условиями Дирихле, Неймана и третьими граничными условиями. Формулируется теорема о единственности.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Проверка условий теорем для краевых задач для стационарных уравнений колебаний, теплопроводности. Упор делается на граничные задачи Дирихле, Неймана, третьего рода.

**Тема 19. Гармонические функции. Формулы Грина. Основные свойства. Теоремы о среднем для гармонической функции.**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Вводится понятие гармонической в области функции. Строятся формулы Грина. Формулируются основные свойства гармонических функций, среди которых выделяются теоремы о среднем. Проводится доказательство этих теорем.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Приводятся примеры гармонических функций в ограниченных областях. Где возможно, убеждаемся в выполнении теоремы о среднем. Непосредственной проверкой показываем гармоничность фундаментального решения уравнения Лапласа, потенциалов.

**Тема 20. Принцип максимума для гармонической функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление гармонической функции.**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Как одно из свойств формулируется и доказывается принцип максимума для гармонической функции. Вводится понятие фундаментального решения уравнения Лапласа. Формулируется и доказывается формула, называемая интегральным представлением гармонической функции.

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Построение уравнения Лапласа в круге, шаре. Постановка задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике, круге, кольце, шаре.

**Тема 21. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Определение гармоничности вне области, определения внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения указанных задач.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике методом разделения переменных.

**Тема 22. Метод функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа: определение функции Грина и ее основные свойства.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Функция Грина. Метод функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Основные свойства функции Грина: неотрицательность, поведение нормальной производной, симметрия.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение краевой задачи Неймана и смешанных краевых задач для уравнения Лапласа в прямоугольнике методом разделения переменных.

**Тема 23. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для шара методом функции Грина (формула Пуассона).**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Построение функции Грина для шара. Вычисление нормальной производной на сфере. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для шара методом (формула Пуассона).

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Решение смешанных краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике методом Фурье.

**Тема 24. Поведение гармонической функции и ее производных на бесконечности. Исследование единственности решения внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Регулярность гармонических функций. Поведение гармонической функции и ее производных на бесконечности. Устанавливается продолжением гармонической функции с шара и определением свойств решения для шара.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце методом разделения переменных.

**Тема 25. Метод разделения переменных решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Метод разделения переменных решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области. Разбиение задачи. Согласование граничных условий.

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение краевых задач Дирихле для уравнения Лапласа в круге и секторе методом разделения переменных.

## **Тема 26. Метод разделения переменных решения внутренней и внешней задач Дирихле для круга методом разделения переменных. Формула Пуассона.**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Уравнение Лапласа для круга в полярных координатах. Метод разделения переменных решения внутренней и внешней задач Дирихле для круга методом разделения переменных. Формула Пуассона для круга.

### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение краевых задач Неймана для уравнения Лапласа в круге и секторе методом разделения переменных.

## **Тема 27. Потенциалы простого и двойного слоя, гармонические функции. Геометрические свойства поверхности Ляпунова.**

### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Вводятся понятия ньютонова потенциала. Потенциалы простого и двойного слоя. Устанавливается, что указанные потенциалы являются гармоническими в области и вне ее. Понятие об областях Ляпунова и их подмножествах. Свойства областей Ляпунова.

### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Построение фундаментального решения уравнения Лапласа в прямоугольнике методом Фурье. Выяснение связи свертки фундаментального решения с решением уравнения Пуассона.

## **Тема 28. Прямое значение потенциала двойного слоя. Интеграл Гаусса.**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Понятие о прямом значении потенциала двойного слоя. Существование и непрерывность прямого значения потенциала двойного слоя. Частный случай потенциала двойного слоя. Интеграл Гаусса и его значения.

### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение текстовых задач, приводящих к уравнениям гиперболического типа в канонических областях.

## **Тема 29. Предельные значения потенциала двойного слоя.**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Связь потенциала двойного слоя с Интегралом Гаусса. Разрывность потенциала двойного слоя при переходе через границу. выявление скачков предельных значений потенциала двойного слоя.

### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение текстовых задач, приводящих к уравнениям параболического типа в канонических областях.

## **Тема 30. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Непрерывность потенциала простого слоя. Понятие правильной нормальной производной потенциала. Прямое значение правильной нормальной производной. Связь предельных значений потенциала двойного слоя с предельным значением правильной нормальной производной потенциала простого слоя. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.

### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение текстовых задач, приводящих к уравнениям эллиптического типа в канонических областях.

## **Тема 31. Интегральные уравнения теории потенциала.**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. Интегральные уравнения теории потенциала и их свойства.

### **лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Решение общих задач об объемном потенциале. Связь потенциалов с решениями краевых задач.

#### 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

| N   | Раздел Дисциплины  | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|--|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 18. | Тема 18. Основные граничные задачи для эллиптического уравнения. Исследование единственности решения основных граничных.                           | 6       | 1               | подготовка домашнего задания          | 5                      | Письменное домашнее задание           |
| 19. | Тема 19. Гармонические функции. Формулы Грина. Основные свойства. Теоремы о среднем для гармонической функции.                                     | 6       | 2,3             | подготовка домашнего задания          | 8                      | Письменное домашнее задание           |
| 20. | Тема 20. Принцип максимума для гармонической функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление гармонической функции. | 6       | 4,5             | подготовка домашнего задания          | 8                      | Письменное домашнее задание           |
| 21. | Тема 21. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения.   | 6       | 6               | подготовка домашнего задания          | 5                      | Письменное домашнее задание           |
| 22. | Тема 22. Метод функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа: определение функции Грина и ее основные свойства.                       | 6       | 7               | подготовка домашнего задания          | 4                      | Письменное домашнее задание           |

| N   | Раздел<br>Дисциплины  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды<br>самостоятельной<br>работы<br>студентов | Трудоемкость<br>(в часах) | Формы контроля<br>самостоятельной<br>работы |
|-----|---|---------|--------------------|--|---------------------------|---|
| 23. | Тема 23. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для шара методом функции Грина (формула Пуассона).   | 6       | 8,9                | подготовка домашнего задания                   | 9                         | Письменное домашнее задание                 |
| 24. | Тема 24. Поведение гармонической функции и ее производных на бесконечности. Исследование единственности решения внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа. | 6       | 10                 | подготовка домашнего задания                   | 5                         | Письменное домашнее задание                 |
| 25. | Тема 25. Метод разделения переменных решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области.   | 6       | 11                 | подготовка домашнего задания                   | 4                         | Письменное домашнее задание                 |
|     |   |         |                    | подготовка к контрольной работе                | 6                         | Контрольная работа                          |
| 26. | Тема 26. Метод разделения переменных решения внутренней и внешней задач Дирихле для круга методом разделения переменных. Формула Пуассона.                                | 6       | 12                 | подготовка домашнего задания                   | 4                         | Письменное домашнее задание                 |
| 27. | Тема 27. Потенциалы простого и двойного слоя, гармонические функции. Геометрические свойства поверхности Ляпунова.  | 6       | 13,14              | подготовка домашнего задания                   | 8                         | Письменное домашнее задание                 |
| 28. | Тема 28. Прямое значение потенциала двойного слоя. Интеграл Гаусса.   | 6       | 15                 | подготовка домашнего задания                   | 4                         | Письменное домашнее задание                 |
| 29. | Тема 29. Предельные значения потенциала двойного слоя.  | 6       | 16                 | подготовка домашнего задания                   | 5                         | Письменное домашнее задание                 |
| 30. | Тема 30. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.  | 6       | 17                 | подготовка домашнего задания                   | 5                         | Письменное домашнее задание                 |

| N   | Раздел Дисциплины                                  | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|--|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 31. | Тема 31. Интегральные уравнения теории потенциала. | 6       | 18              | подготовка домашнего задания          | 4                      | Письменное домашнее задание           |
|     |  |         |                 | подготовка к контрольной работе       | 6                      | Контрольная работа                    |
|     | Итого  |         |                 |                                       | 90                     |                                       |

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лекционных и лабораторных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

**Тема 1. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.**

зачет и экзамен

**Тема 2. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.**

зачет и экзамен

**Тема 3. Вывод основных уравнений математической физики: уравнение колебаний струны, уравнение колебаний мембраны, уравнение колебаний стержня, уравнение теплопроводности в твердом теле, уравнение теплопроводности стержня, примеры стационарных уравнений.**

зачет и экзамен

**Тема 4. Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Колебания полуограниченной струны.**

зачет и экзамен

**Тема 5. Решение однородного уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Анализ решения задачи о свободных колебаниях струны.**

зачет и экзамен

**Тема 6. Обоснование метода Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны.**

зачет и экзамен

**Тема 7. Метод разделения переменных решения задачи о вынужденных колебаниях струны. Явление резонанса. Метод разделения переменных решения задачи о свободных колебаниях прямоугольной мембраны.**

зачет и экзамен

**Тема 8. Теорема единственности решения основных граничных задач для волнового уравнения.**

зачет и экзамен

**Тема 9. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.**

зачет и экзамен

**Тема 10. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.**

зачет и экзамен

**Тема 11. Формула Пуассона решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения (метод спуска)**

зачет и экзамен

**Тема 12. Теорема о единственности решения основных краевых задач для уравнения теплопроводности.**

зачет и экзамен

**Тема 13. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности стержня.**

зачет и экзамен

**Тема 14. Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности стержня. Анализ полученного решения. Квазистационарный режим остывания стержня.**

зачет и экзамен

**Тема 15. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.**

зачет и экзамен

**Тема 16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье.**

зачет и экзамен

**Тема 17. Обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.**

зачет и экзамен

**Тема 18. Основные граничные задачи для эллиптического уравнения. Исследование единственности решения основных граничных.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Проверить условия теоремы о единственности для различных краевых задач для стационарных уравнений колебаний, теплопроводности при наличии неоднородностей материалов и учетом условий сопряжения в областях неоднородностей. Упор делается на граничные задачи Дирихле, Неймана, третьего рода.

**Тема 19. Гармонические функции. Формулы Грина. Основные свойства. Теоремы о среднем для гармонической функции.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Построить примеры гармонических в ограниченной области функций в двух и трехмерном случаях. Убедиться, что в трехмерном случае гармоническая всюду функция тривиальна.

**Тема 20. Принцип максимума для гармонической функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральное представление гармонической функции.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Изучить литературу по записи оператора Лапласа в различных системах координат: полярной, цилиндрической и сферической.

**Тема 21. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

По аналогии с гиперболическим случаем решить методом разделения переменных задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Обратит внимание на согласование граничных условий в углах.

**Тема 22. Метод функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа: определение функции Грина и ее основные свойства.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

По аналогии с гиперболическим случаем решить методом разделения переменных смешанную задачу Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Также обратит внимание на согласование граничных условий в углах.

**Тема 23. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для шара методом функции Грина (формула Пуассона).**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

По аналогии с гиперболическим случаем разработать подход, основанный на методе Фурье для решения уравнения Пуассона в прямоугольнике.

**Тема 24. Поведение гармонической функции и ее производных на бесконечности. Исследование единственности решения внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Восстановить знания о решении однородных ОДУ с переменными коэффициента. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце.

**Тема 25. Метод разделения переменных решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области.**

Контрольная работа , примерные вопросы:

К контрольной работе решить задачи о теплопроводности в стержнях по рекомендованным сборникам. Обратит внимание на выбор функций для снятия граничных условий, приводящих к более простым правым частям модифицированных уравнений.

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Поставить различные краевые задачи для уравнения Лапласа в секторе кольца. Сделать выводы о возможных согласованиях граничных условий.

**Тема 26. Метод разделения переменных решения внутренней и внешней задач Дирихле для круга методом разделения переменных. Формула Пуассона.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Сравнить формулу Пуассона для круга с соответствующей формулой для шара. Сделать выводы о структуре нормальной производной от функции Грина для круга.

**Тема 27. Потенциалы простого и двойного слоя, гармонические функции. Геометрические свойства поверхности Ляпунова.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Восстановить знания о функции Дирака и ее связи с понятием фундаментального решения. Построить фундаментальное решение уравнения Лапласа в прямоугольнике методом Фурье. Выяснить связи свертки фундаментального решения с решением уравнения Пуассона.

### **Тема 28. Прямое значение потенциала двойного слоя. Интеграл Гаусса.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Восстановить знания о постановке задач для уравнения колебаний и решать текстовые задачи из рекомендованных сборников задач.

### **Тема 29. Предельные значения потенциала двойного слоя.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Восстановить знания о постановке задач для уравнения теплопроводности и решать текстовые задачи из рекомендованных сборников задач.

### **Тема 30. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.**

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Восстановить знания о постановке задач для уравнений теплопроводности колебаний, и решать текстовые задачи из рекомендованных сборников задач.

### **Тема 31. Интегральные уравнения теории потенциала.**

Контрольная работа , примерные вопросы:

Подготовиться к решению текстовых задач на определение деформаций и температур, включая задачи об установившихся процессах и решать текстовые задачи из рекомендованных сборников задач.

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Решить задачи об объемном потенциале из рекомендованного сборника задач по курсу.

### **Итоговая форма контроля**

зачет и экзамен

### **Итоговая форма контроля**

зачет и экзамен

Примерные вопросы к :

Для текущего контроля успеваемости предусмотрено проведение зачета.

Примерные вопросы на зачет:

1. задачи на классификацию приведение уравнений второго порядка к каноническому виду,
2. задачи вывод основных уравнений математической физики,
3. решение задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типа методами разделения переменных,
3. решение задач для уравнений гиперболического типа на основе интегральных представлений решений (формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа).

По данной дисциплине предусмотрено проведение экзамена. Примерные вопросы для экзамена приведены в Приложении 1.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

### **ПРОГРАММА КУРСА "УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"**

1. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка
2. Приведение уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами к каноническому виду.
3. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.
4. Вывод уравнения колебаний струны.
5. Вывод уравнения колебаний мембраны.
6. Вывод уравнения теплопроводности в твердом теле.

7. Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны.
8. Формула Пуассона решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.
9. Формула Пуассона решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения.
10. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.
11. Теорема единственности решения основных граничных задач для одномерного гиперболического уравнения.
12. Решение однородного уравнения колебаний струны методом разделения переменных.
13. Обоснование метода Фурье решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны.
14. Анализ решения первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний струны (стоячие волны).
15. Метод разделения переменных решения задачи о вынужденных колебаниях струны.
16. Теорема о единственности решения основных краевых задач для уравнения теплопроводности.
17. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности стержня.
18. Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности стержня. Анализ полученного решения.
19. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
20. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
21. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье.
22. Обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
23. Исследование единственности решения основных граничных задач для эллиптического уравнения.
24. Теоремы о среднем для гармонической функции.
25. Принцип максимума для гармонической функции.
26. Поведение гармонической функции и ее производных на бесконечности.
27. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Исследование единственности решения.
28. Исследование единственности решения внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа.
29. Метод разделения переменных решения внутренней и внешней задач Дирихле для круга методом разделения переменных.
30. Интегральное представление гармонической функции.
31. Метод функции Грина решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа: определение функции Грина и ее основные свойства.
32. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для шара методом функции Грина (формула Пуассона).

33. Потенциалы простого и двойного слоя --- гармонические функции.
34. Прямое значение потенциала двойного слоя.
35. Интеграл Гаусса.
36. Предельные значения потенциала двойного слоя.
37. Предельные значения правильной нормальной производной потенциала простого слоя.
38. Прямое значение потенциала простого слоя. Непрерывность потенциала простого слоя.
39. Сведение основных краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям

### **7.1. Основная литература:**

1. Карчевский М. М. Лекции по уравнениям математической физики / М. М. Карчевский; Казан. гос. ун-т.- Казань: Казанский государственный университет, 2009.- 148, [1] с.: ил.; 21.- Библиогр. в конце кн. (15 назв.), 200.
- 2.Соболева Е.С., Фатеева Г.М. Задачи и упражнения по уравнениям математической физики. - М.: Физматлит, 2012. - 96 с. e.lanbook.com [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=5295](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=5295)
3. Ильин А.М. Уравнения математической физики: учебное пособие. - М.: Физматлит, 2009. - 192 с.<http://e.lanbook.com/view/book/2181/>
4. Емельянов В.М., Рыбакина Е.А.Уравнения математической физики. Практикум по решению задач. - Санкт-Петербург: Лань, 2008. - 224 с.  
<http://e.lanbook.com/view/book/140/>
5. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 352 с.  
<http://e.lanbook.com/view/book/59660/>

### **7.2. Дополнительная литература:**

1. Бушманова, Г. В. Уравнения математической физики: [учебное пособие] / Г. В. Бушманова; Федер. гос. авт. образоват. учреждение высш. проф. образования 'Казан. (Приволж.) федер. ун-т'. - [2-е изд., испр.]- Казань: [Казанский университет], 2011.- 126 с.
2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики имеханики. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 256 с.  
<http://e.lanbook.com/view/book/59377/>
3. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 592 с. <http://e.lanbook.com/view/book/48190/>

### **7.3. Интернет-ресурсы:**

- Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.exponenta.ru>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>  
Сайт с учебными материалами по математике - <http://mathhelp.spb.ru>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Уравнения математической физики" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Карчевский М.М. \_\_\_\_\_

Федотов Е.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Бадриев И.Б. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.