

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Гладкие многообразия и группы Ли Б1.В.ДВ.13

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Иваньшин П.Н.

**Рецензент(ы):**

Шурыгин В.В.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Попов А. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2018

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Иваньшин П.Н. Кафедра геометрии отделение математики , Pyotr.Ivanshin@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Выпускник, освоивший дисциплину:

Должен демонстрировать способность и готовность:

Решать основные задачи по теории групп и алгебр Ли. Например, строить алгебру по группе, находить

инфинитезимальный базис. Также необходимо уметь применять полученные знания к решению сопутствующих

задач, например, к построению диаграмм Дынкина.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ДВ.13 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 6 семестр.

Алгебраическая топология. Теория представлений групп и алгебр Ли.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1 (профессиональные компетенции)	способность работать самостоятельно и в коллективе, руководить людьми и подчинять личные интересы общей цели
ОПК-3 (профессиональные компетенции)	Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат

В результате освоения дисциплины студент:

4. должен демонстрировать способность и готовность:

Решать основные задачи по теории групп и алгебр Ли. Например, строить алгебру по группе, находить инфинитезимальный базис. Также необходимо уметь применять полученные знания к решению сопутствующих задач, например, к построению диаграмм Дынкина.

### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Матричные и классические группы	6		2	2	0	
2.	Тема 2. Топология классических групп	6		2	2	0	
3.	Тема 3. Универсальная накрывающая группа	6		2	2	0	
4.	Тема 4. Простые группы Ли	6		2	2	0	
5.	Тема 5. Алгебра Ли группы Ли	6		4	4	0	
6.	Тема 6. Локальная и глобальная дифференцируемость группы Ли.	6		2	2	0	
7.	Тема 7. Представления групп Ли	6		4	4	0	
8.	Тема 8. Действия групп Ли	6		4	4	0	
9.	Тема 9. Спецфункции	6		2	2	0	
10.	Тема 10. Группы Ли и дифференциальные уравнения	6		2	2	0	
	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	Зачет
	Итого			26	26	0	

#### 4.2 Содержание дисциплины

##### Тема 1. Матричные и классические группы

###### *лекционное занятие (2 часа(ов)):*

Примеры основных групп. Полупрямое произведение. Кватернионы.

###### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Доказать, что данная группа - группа Ли, найти размерность.

##### Тема 2. Топология классических групп

###### *лекционное занятие (2 часа(ов)):*

Процесс Грама-Шмидта. Матричное экспоненциальное отображение. Лево-инвариантное векторное поле. Полярное разложение.

###### *практическое занятие (2 часа(ов)):*

Найти фундаментальную группу данной группы Ли.

##### Тема 3. Универсальная накрывающая группа

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Примеры топологических групп. Группа компонент. Универсальная накрывающая группа.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Построить универсальную накрывающую группу данной группы.

**Тема 4. Простые группы Ли**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Спинорная группа. Форма Киллинга. Клиффордовы алгебры. Максимальный тор.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Найти максимальную коммутативную подгруппу группы Ли.

**Тема 5. Алгебра Ли группы Ли**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Однопараметрическая подгруппа. Единственность однопараметрической подгруппы. Канонические координаты. Дифференцируемость классического гомоморфизма. Фактор-группы. Присоединенное представление группы Ли.

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Найти образующие данной алгебры Ли.

**Тема 6. Локальная и глобальная дифференцируемость группы Ли.**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Формула Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа. Нильпотентные группы и алгебры Ли. Алгебра Гейзенберга.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Найти максимальный идеал алгебры Ли.

**Тема 7. Представления групп Ли**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Теорема Риза-Фишера. Неприводимость представления. Тензорное произведение представлений. Лемма Шура. Интегрирование, мера Хаара. Унитарный трюк Вейля. Ортогональность. Компактные группы Ли.

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Проверит представление группы Ли на неприводимость.

**Тема 8. Действия групп Ли**

**лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Группа изотропии. Фундаментальные теоремы Ли. Инварианты.  $k$ -точечные инварианты.

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Привести примеры эффективного действия групп Ли.

**Тема 9. Спецфункции**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Универсальная обертывающая алгебра. Оператор Казимира. Группа  $SO(3)$ . Сферические гармоники и полиномы Лежандра. Евклидова группа плоскости и функции Бесселя.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Описать структуру инвариантных относительно действия группы функций на данном многообразии.

**Тема 10. Группы Ли и дифференциальные уравнения**

**лекционное занятие (2 часа(ов)):**

ОДУ первого порядка. Поток векторного поля. Уравнения в частных производных. Пример: уравнение теплопроводности.

**практическое занятие (2 часа(ов)):**

Построить по частному решению ДУ общее решение.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Матричные и классические группы	6		решение задач	6	опрос
2.	Тема 2. Топология классических групп	6		решение задач	6	опрос
3.	Тема 3. Универсальная накрывающая группа	6		решение задач	6	опрос
4.	Тема 4. Простые группы Ли	6		решение задач	4	Контрольная работа
5.	Тема 5. Алгебра Ли группы Ли	6		решение задач	6	опрос
6.	Тема 6. Локальная и глобальная дифференцируемость группы Ли.	6		решение задач	4	опрос
7.	Тема 7. Представления групп Ли	6		решение задач	8	опрос
8.	Тема 8. Действия групп Ли	6		решение задач	8	опрос
9.	Тема 9. Спецфункции	6		решение задач	8	опрос
10.	Тема 10. Группы Ли и дифференциальные уравнения	6				
	Итого				56	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Проектор, мультимедийная доска.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Матричные и классические группы

опрос , примерные вопросы:

Исследование классической группы. Полное решение -- полный балл.

### Тема 2. Топология классических групп

опрос , примерные вопросы:

Исследование фундаментальных групп классической группы. Полное решение -- полный балл.

### Тема 3. Универсальная накрывающая группа

опрос , примерные вопросы:

Исследование накрывающей классической группы. Полное решение -- полный балл.

### Тема 4. Простые группы Ли

Контрольная работа , примерные вопросы:

Поиск максимальной нормальной подгруппы группы Ли. Полное решение -- полный балл.

### Тема 5. Алгебра Ли группы Ли

опрос , примерные вопросы:

Построение алгебры Ли по группе Ли. Полное решение -- полный балл.

### **Тема 6. Локальная и глобальная дифференцируемость группы Ли.**

опрос , примерные вопросы:

Скобки Ли на группе Ли. Полное решение -- полный балл.

### **Тема 7. Представления групп Ли**

опрос , примерные вопросы:

Построение представления алгебры Ли. Полное решение -- полный балл.

### **Тема 8. Действия групп Ли**

опрос , примерные вопросы:

Исследование действия группы Ли на многообразии. Полное решение -- полный балл.

### **Тема 9. Спецфункции**

опрос , примерные вопросы:

Исследование функций на многообразии, инвариантных относительно действия группы Ли на многообразии. Полное решение -- полный балл.

### **Тема 10. Группы Ли и дифференциальные уравнения**

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету:

Вопросы к зачету:

1. 1) Полупрямое произведение. Кватернионы.

2) Пусть задано отображение  $f: S^3 \times S^3 \rightarrow \text{Gl}(4, \mathbb{R})$ ,  $(p, q) \rightarrow (r \rightarrow pr^{-1}q)$ .

Доказать, что:

(a)  $f$  --- гомоморфизм групп.

(b) Ядро  $f$  ---  $\{(1, 1), (-1, -1)\} = Z^2$ .

(c) Образ  $f$  принадлежит  $\text{SO}(4)$ .

(d)  $f$  --- двулистное накрытие связной 6-мерной подгруппы  $\text{SO}(4)$ .

(e) Описать двулистное гомоморфное накрытие  $\text{SO}(4) \rightarrow \text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ .

2. 1) Матричное экспоненциальное отображение. Лево-инвариантное векторное поле.

2) Доказать, что преобразование Кэли  $f(A) = (I - A)(I + A)^{-1}$  --- изоморфизм между  $\text{SO}(n)$  и  $\text{U}(n)$ .

3. 1) Группа компонент. Универсальная накрывающая группа.

2) Доказать теорему о монодромии.

4. 1) Клиффордовы алгебры.

2) Найти локальный гомоморфизм  $h: U \rightarrow V$ , где  $U$  и  $V$  --- окрестности  $0 \in \mathbb{R}$ , с операцией  $+$ , который нельзя

продолжить до гомоморфизма  $\mathbb{R}$ .

5. 1) Однопараметрическая подгруппа. Единственность однопараметрической подгруппы.

2) Показать, что комплексная экспоненциальная функция --- экспоненциальное отображение мультипликативной группы Ли ненулевого комплексного числа.

6. 1) Теорема Риза-Фишера. Неприводимость представления.

2) Показать, что внутренние дифференцирования алгебры Ли --- идеал алгебры Ли всех дифференцирований.

7. 1) Универсальная обертывающая алгебра.

2) Доказать, что  $\int_G f(x^{-1})dx$  --- правый интеграл Хаара на  $G$ . Если  $G$  унимодулярна то  $\int_G f(x^{-1})dx = \int_G f(x)dx$

### 7.1. Основная литература:

Корешков, Николай Александрович.

Алгебры Ли и ассоциативные алгебры [Текст : электронный ресурс] : учебное пособие / Н. А. Корешков, С. М. Скрябин ; Казан. гос. ун-т .? Электронные данные (1 файл: 0,29 Мб) .? (Казань : Казанский федеральный университет, 2014) .? Загл. с экрана .? Режим доступа: открытый.

Оригинал копии: Алгебры Ли и ассоциативные алгебры : учебное пособие / Н. А. Корешков, С. М. Скрябин ; Казан. гос. ун-т .? Казань : Казан. гос. ун-т, 2007 .? 24 с. ; 20.

URL:<http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-767489.pdf>

### 7.2. Дополнительная литература:

Султанбеков, Фоат Фаритович (канд. физ.-мат. наук ; 1950 -) .

От решёток к булевым алгебрам [Текст: электронный ресурс] : учебное пособие / Ф. Ф. Султанбеков ; Казан. федер. ун-т .? Электронные данные (1 файл: 0,66 Мб) .? (Казань : Казанский федеральный университет, 2012) .? Загл. с экрана .? Режим доступа: открытый .? URL:[http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2012\\_000032.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2012_000032.pdf)

### 7.3. Интернет-ресурсы:

Introduction to Lie Groups -

<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-755-introduction-to-lie-groups-fall-2004/>

Lie Groups and Lie Algebra - <https://cosmolearning.org/courses/introduction-lie-groups/>

Алгебры Ли, представления. - [http://qft.itp.ac.ru/mbersht/Group/2014/090\\_Lect.pdf](http://qft.itp.ac.ru/mbersht/Group/2014/090_Lect.pdf)

Введение в теорию алгебр Ли и их представлений -

[http://www.vixri.com/d/Xamfris%20Dzh.%20\\_Vvedenie%20v%20teoriju%20algebr%20Li%20i%20ix%20pr](http://www.vixri.com/d/Xamfris%20Dzh.%20_Vvedenie%20v%20teoriju%20algebr%20Li%20i%20ix%20pr)

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ - <http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/lie.pdf>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Гладкие многообразия и группы Ли" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.



Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

мультимедийная аудитория, компьютерный класс

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):

Иваньшин П.Н. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Шурыгин В.В. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.