

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор
по образовательной деятельности КФУ
Проф. Таюрский Д.А.

"__" _____ 20__ г.

Программа дисциплины
Коммутативная алгебра Б1.В.ДВ.13

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Скрябин С.М.

Рецензент(ы):

Абызов А.Н.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Арсланов М. М.

Протокол заседания кафедры No ___ от "___" _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No ___ от "___" _____ 201__ г

Регистрационный No

Казань
2019

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) ведущий научный сотрудник, д.н. Скрыбин С.М. учебно-исследовательская лаборатория алгоритмических методов алгебры и логики Кафедра алгебры и математической логики, Serge.Skryabin@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины 'Коммутативная алгебра' являются: дальнейшее освоение алгебраического аппарата, используемого в различных разделах математики. При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения алгебраических задач и задач, связанных с приложениями алгебраических методов. Получаемые знания необходимы для более глубокого изучения теории чисел, теории представлений, теории колец и модулей и других разделов математики.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.13 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 6 семестр.

Изучение коммутативной алгебры предполагает хорошее владение материалом базовых университетских курсов алгебры и теории чисел. В свою очередь данная дисциплина создаёт основу для более глубокого изучения теории колец и модулей, ассоциативной и неассоциативной алгебры, теории представлений, алгебраической и аналитической теории чисел.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1 (профессиональные компетенции)	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности
ОПК-3 (профессиональные компетенции)	способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата

В результате освоения дисциплины студент:

4. должен демонстрировать способность и готовность:

самостоятельно проводить математические рассуждения и решать задачи по изучаемому предмету

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Кольца, идеалы и гомоморфизмы	6		4	4	0	
2.	Тема 2. Простые и максимальные идеалы	6		4	4	0	
3.	Тема 3. Кольца частных	6		4	4	0	
4.	Тема 4. Модули над кольцом	6		4	4	0	
5.	Тема 5. Целые расширения	6		4	4	0	
6.	Тема 6. Нётеровы кольца и модули	6		6	6	0	
	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	Зачет
	Итого			26	26	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Кольца, идеалы и гомоморфизмы

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Основные понятия и примеры. Факторкольца. Конструкция кольца многочленов с коэффициентами в заданном кольце. Продолжение гомоморфизмов на факторкольца и на кольца многочленов. Китайская теорема об остатках. Операции над идеалами. Радикал идеала. Расширение и сужение идеалов относительно гомоморфизма колец. Соответствие между идеалами исходного кольца и его факторкольца. Делители нуля. Обратимые элементы. Области целостности и поля.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Основные понятия и примеры. Факторкольца. Конструкция кольца многочленов с коэффициентами в заданном кольце. Продолжение гомоморфизмов на факторкольца и на кольца многочленов. Китайская теорема об остатках. Операции над идеалами. Радикал идеала. Расширение и сужение идеалов относительно гомоморфизма колец. Соответствие между идеалами исходного кольца и его факторкольца. Делители нуля. Обратимые элементы. Области целостности и поля.

Тема 2. Простые и максимальные идеалы

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Характеризация простых и максимальных идеалов в терминах факторколец. Существование максимальных идеалов. Критерий обратимости элемента кольца. Локальные кольца и их характеристика. Нильрадикал кольца и его описание как пересечения простых идеалов. Свойства включения для простых идеалов.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Характеризация простых и максимальных идеалов в терминах факторколец. Существование максимальных идеалов. Критерий обратимости элемента кольца. Локальные кольца и их характеристика. Нильрадикал кольца и его описание как пересечения простых идеалов. Свойства включения для простых идеалов.

Тема 3. Кольца частных

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Мультипликативно замкнутые подмножества. Конструкция кольца частных. Канонический гомоморфизм в кольцо частных и его свойства. Продолжение гомоморфизмов на кольца частных. Соответствие между простыми идеалами исходного кольца и его кольца частных. Полное кольцо частных. Поле частных целостного кольца. Локализация кольца в простом идеале.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Мультипликативно замкнутые подмножества. Конструкция кольца частных. Канонический гомоморфизм в кольцо частных и его свойства. Продолжение гомоморфизмов на кольца частных. Соответствие между простыми идеалами исходного кольца и его кольца частных. Полное кольцо частных. Поле частных целостного кольца. Локализация кольца в простом идеале.

Тема 4. Модули над кольцом

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Подмодули, фактормодули, гомоморфизмы. Теорема о гомоморфизме для модулей. Свободные модули. Инвариантность числа элементов в базисе. Аннуляторы конечно порождённых модулей. Лемма Накаямы. Модули без кручения над кольцом главных идеалов.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Подмодули, фактормодули, гомоморфизмы. Теорема о гомоморфизме для модулей. Свободные модули. Инвариантность числа элементов в базисе. Аннуляторы конечно порождённых модулей. Лемма Накаямы. Модули без кручения над кольцом главных идеалов.

Тема 5. Целые расширения

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Элементы кольца, целые над подкольцом. Характеризации целых элементов. Целые расширения колец. Транзитивность целых расширений. Целое замыкание подкольца. Поле алгебраических чисел и кольцо целых алгебраических чисел. Целые расширения факторколец и колец частных. Теорема о подъёме для простых идеалов. Размерность Крулля и её сохранение в целом расширении. Целозамкнутые области целостности. Теорема Коэна-Зайденберга о спуске.

практическое занятие (4 часа(ов)):

Элементы кольца, целые над подкольцом. Характеризации целых элементов. Целые расширения колец. Транзитивность целых расширений. Целое замыкание подкольца. Поле алгебраических чисел и кольцо целых алгебраических чисел. Целые расширения факторколец и колец частных. Теорема о подъёме для простых идеалов. Размерность Крулля и её сохранение в целом расширении. Целозамкнутые области целостности. Теорема Коэна-Зайденберга о спуске.

Тема 6. Нётеровы кольца и модули

лекционное занятие (6 часа(ов)):

Эквивалентные характеризации нётеровых модулей. Соотношение между нётеровостью модуля, его подмодуля и фактормодуля. Нётеровость конечно-порожденных модулей над нётеровым кольцом. Теорема Гильберта о базисе. Теорема о множестве простых идеалов, содержащих заданный идеал нётерова кольца. Конечность числа минимальных элементов этого множества. Ассоциированные простые идеалы и делители нуля. Примарное разложение идеалов в нётеровом кольце. Первая и вторая теорема единственности.

практическое занятие (6 часа(ов)):

Эквивалентные характеризации нётеровых модулей. Соотношение между нётеровостью модуля, его подмодуля и фактормодуля. Нётеровость конечно-порожденных модулей над нётеровым кольцом. Теорема Гильберта о базисе. Теорема о множестве простых идеалов, содержащих заданный идеал нётерова кольца. Конечность числа минимальных элементов этого множества. Ассоциированные простые идеалы и делители нуля. Примарное разложение идеалов в нётеровом кольце. Первая и вторая теорема единственности.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Кольца, идеалы и гомоморфизмы	6		домашнее практическое задание (задачи и упражнения на освоение теоретического материала)	9	устный опрос
2.	Тема 2. Простые и максимальные идеалы	6		самостоятельное изучение материала по заданным темам	9	семинарские доклады
3.	Тема 3. Кольца частных	6		домашнее практическое задание (задачи и упражнения на освоение теоретического материала)	9	устный опрос

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
4.	Тема 4. Модули над кольцом	6		домашнее практическое задание (задачи и упражнения на освоение теоретического материала)	9	устный опрос
5.	Тема 5. Целые расширения	6		самостоятельное изучение материала по заданным темам	9	семинарские доклады
6.	Тема 6. Нётеровы кольца и модули	6		самостоятельное изучение материала по заданным темам	11	семинарские доклады
	Итого				56	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

активные и интерактивные формы, лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, экзамены, компьютеры. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. В каждом семестре проводятся контрольные работы (на семинарах). Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ и выполнения самостоятельной работы

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Кольца, идеалы и гомоморфизмы

устный опрос , примерные вопросы:

1. Факторкольцо R/I нулевое тогда и только тогда, когда $1 \in I$. 2. Проверить, что произведение двух идеалов является идеалом. 3. Если $I, J \triangleleft R$, то $IJ \subseteq I \cap J$. 4. Если $I, J, K \triangleleft R$, то $I(J+K) = IJ + IK$. 5. Если $I, J, K \triangleleft R$ и $I \supseteq J$, то $I \cap (J+K) = J + (I \cap K)$. 6. Объединение возрастающей цепочки идеалов $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ кольца R является идеалом. 7. Операции расширения и сужения относительно сюръективного гомоморфизма колец $\varphi: R \rightarrow R'$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между идеалами кольца R , содержащими $\text{Ker } \varphi$, и всеми идеалами кольца R' . 8. Доказать, что любой идеал I кольца Z --- главный. 9. Доказать, что для $a, b \in Z$ включение $Z a \subseteq Z b$ выполняется тогда и только тогда, когда a делится на b . 10. Доказать, что для $a, b \in Z$ выполняется равенство $Z a + Z b = Z d$, где $d = \text{НОД}(a, b)$.

Тема 2. Простые и максимальные идеалы

семинарские доклады , примерные вопросы:

1. Лемма Цорна. Существование максимальных идеалов. 2. Свойства включения и исключения для простых идеалов. 3. Китайская теорема об остатках. 4. Характеризация нильрадикала коммутативного кольца. 5. Распознавание простоты и максимальности идеала по факторкольцу. 6. Нахождение простых и максимальных идеалов в кольце целых чисел.

Тема 3. Кольца частных

устный опрос , примерные вопросы:

1. Проверить, что операции сложения и умножения на RS^{-1} корректно определены и удовлетворяют аксиомам кольца. 2. В каком случае кольцо RS^{-1} нулевое? 3. Доказать, что $(a,s)\sim(b,t)$ тогда и только тогда, когда существует $w\in S$, для которого $(at-bs)w=0$. 4. В случае, когда SS состоит из делителей нуля, отношение $(a,s)\sim(b,t)$ выполнено тогда и только тогда, когда $at=bs$. 5. Если R --- область целостности и $0\notin S$, то кольцо RS^{-1} также целостно. 6. Пусть $\triangleleft R$, $a\in R$, $s\in S$. Доказать, что $a/s\in IS^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует $t\in S$, для которого $at\in I$. 7. Для заданных идеалов $I, J\triangleleft R$ проверить равенства $(I+J)S^{-1}=IS^{-1}+JS^{-1}$, $(I\cap J)S^{-1}=IS^{-1}\cap JS^{-1}$, $(IJ)S^{-1}=IS^{-1}\cdot JS^{-1}$. 8. Построить гомоморфизм $RS^{-1}\rightarrow RT^{-1}$ для двух мультипликативно замкнутых подмножеств $S\subseteq T$ кольца R . Проверить его инъективность в случае, когда T не содержит делителей нуля.

Тема 4. Модули над кольцом

устный опрос , примерные вопросы:

1. Пересечение любого семейства подмодулей R -модуля M является подмодулем. 2. Сумма любого семейства подмодулей R -модуля M является подмодулем. 3. Если $N_1\subseteq N_2\subseteq\dots$ --- неубывающая цепочка подмодулей R -модуля M , то объединение $\bigcup N_i$ также является подмодулем. 4. Если A, B, C --- три подмодуля R -модуля M , причём $B\subseteq C$, то $(A+B)\cap C=(A\cap C)+B$. 5. Пусть $\triangleleft R$. Показать, что всякий R -модуль M , удовлетворяющий условию $IM=0$, может рассматриваться как R/I -модуль, и наоборот. 6. Пусть в R -модуле M задан подмодуль N . Установить биективное соответствие между подмодулями фактормодуля M/N и подмодулями модуля M , содержащими N .

Тема 5. Целые расширения

семинарские доклады , примерные вопросы:

1. Различные критерии элементов, целых над подкольцом. 2. Транзитивность целых расширений. 3. Целое замыкание подкольца. 4. Подъём простых идеалов в целом расширении. 5. Теорема о спуске. 6. Целозамкнутость колец многочленов.

Тема 6. Нётеровы кольца и модули

семинарские доклады , примерные вопросы:

1. Три эквивалентные характеристики нётеровости. 2. Соотношение между нётеровостью модуля, его подмодуля и фактормодуля. 3. Теорема Гильберта о базисе. 4. Конечность числа минимальных простых идеалов нётерова кольца. 5. Алгебраические подмножества аффинного пространства. Топология Зарисского. Неприводимые компоненты аффинного многообразия. 6. Соответствие между идеалами кольца многочленов и алгебраическими множествами.

Итоговая форма контроля

зачет (в 6 семестре)

Примерные вопросы к зачету:

1. Основные операции над идеалами коммутативного кольца.
2. Элементы, целые над подкольцом. Характеризации целых элементов.
3. Факторкольца. Китайская теорема об остатках.
4. Целые расширения колец. Теорема о подъеме для простых идеалов.
5. Простые и максимальные идеалы. Критерии простоты и максимальности в терминах факторколец.
6. Целозамкнутые области целостности. Теорема о спуске.
7. Лемма Цорна. Существование максимальных идеалов.
8. Дискретные нормирования и связанные с ними кольца. Характеризации колец дискретного нормирования.

9. Нильпотентные элементы. Нильрадикал кольца. Описание нильрадикала как пересечения простых идеалов.
10. Дедекиндовы кольца и их характеристика.
11. Построение кольца частных относительно мультипликативно замкнутого множества. Свойство универсальности кольца частных.
12. Разложение идеалов дедекиндова кольца в произведение простых идеалов.
13. Соответствие между идеалами исходного кольца и его кольца частных.
14. Целое замыкание дедекиндова кольца в конечном расширении его поля частных.
15. Локальные кольца. Локализация кольца в его простом идеале.
16. Аппроксимационные теоремы для дедекиндова кольца.
17. Конечно порожденные модули. Лемма Накаямы.
18. Факториальность колец многочленов.
19. Строение конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов.
20. Слабая форма теоремы Гильберта о нулях.

7.1. Основная литература:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- Спб: Лань,2013-432 с.
<http://e.lanbook.com/view/book/30198/>
2. Лекции по теории чисел / П. Г. Л. Дирихле; в обраб. и с доб. Р. Дедекинда ; пер. с нем. А. И. и С. И. Каменецких ; под ред. проф. Б. И. Сегала. Изд. 4-е . Москва : URSS : [ЛИБРОКОМ, 2013] . 369 с
3. Конечномерные алгебры : учебно-методическое пособие / Н. А. Корешков, С. М. Скрябин ; Казан. федер. ун-т, Ин-т математики и механики им. Н. И. Лобачевского. Казань : [Казанский университет], 2014 . 55 с

7.2. Дополнительная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры -- Новое издание, перераб. и доп. -- М.: МЦНМО, 2011. -- 592 с.
2. М. Атья, И. Макдональд, Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
3. С. Ленг, Алгебра. М.: Мир, 1968.
4. А.И. Кострикин, Введение в алгебру: учебник для студентов ун-тов, обучающихся по спец. 'Математика' и 'Прикладная математика', Ч. 3 Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
5. Манин Ю.И. , Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел. - М.: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2009. - 552 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9368

7.3. Интернет-ресурсы:

- Project Euclid - <http://projecteuclid.org/>
Архив препринтов Los Alamos National Laboratory - <http://xxx.lanl.gov/>
Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - <https://e.lanbook.com/reader/book/30198/#1>
Мальцев И.А. Линейная алгебра. - <https://e.lanbook.com/reader/book/610/#1>
Общероссийский математический портал - <http://www.mathnet.ru/>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Коммутативная алгебра" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):

Скрябин С.М. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Абызов А.Н. _____

"__" _____ 201__ г.