МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по образовательной деятельности КФУ
Проф. Таюрский Д.А.
____
"___"_______________20___ г.

Программа дисциплины

Теория множеств Б1.В.ДВ.3

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика
Профиль подготовки: Общий профиль
Квалификация выпускника: бакалавр
Форма обучения: очное
Язык обучения: русский
Автор(ы):
Калимуллин И.Ш.
Рецензент(ы):
Киндер М.И.

СОГЛАСОВАНО:
Заведующий(ая) кафедрой: Арсланов М. М.
Протокол заседания кафедры No ___ от "____" ___________ 201__г
Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :
Протокол заседания УМК No ____ от "____" ___________ 201__г

Регистрационный No

Казань
2019

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) главный научный сотрудник, д.н. (доцент) Калимуллин И.Ш. учебно-исследовательская лаборатория алгоритмических методов алгебры и логики Кафедра алгебры и математической логики , Iskander.Kalimullin@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Главной целью освоения дисциплины (модуля) "Теория множеств" является обучение студентов методам решения задач теории множеств и и соответствующему мышлению. В процессе обучения требуется дать студентам запас базовых знаний по основным разделам теории множеств, обучить рациональному и эффективному использованию полученных знаний при решении типовых задач теории множеств; сформировать у студентов представление о теории множеств как методе изучения широкого круга объектов и процессов; сформировать знания, умения и навыки использования основных понятий теории множеств. Формирование логической и математической культуры студента, фундаментальная подготовка в области математической логики, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.3 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 5 семестр.

Прикладная теория графов входит в цикл дисциплин по выбору. Для успешного изучения прикладной теории графов необходимы знания и умения в объеме стандартного курса дискретной математики и линейной алгебры.

Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата: Б2.ДВ.1. Дисциплина изучается на 2 курсе (4 семестр).

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-3 (профессиональные компетенции)	способность к самостоятельной научно-исследовательской работе
ОПК-4 (профессиональные компетенции)	способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата
ПК-6 (профессиональные компетенции)	способность передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженной в терминах предметной области изучавшегося явления
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способность использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, в экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

возможные сферы приложений методы приложения теории множеств, определения и свойства математических объектов, используемых в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства.

2. должен уметь:

решать задачи теоретического и прикладного характера, используя аппарат теории множеств.

3. должен владеть:

математическим аппаратом теории множеств, методами конструктивного построения различных математических объектов и процессов.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

решать задачи теоретического и прикладного характера, используя аппарат теории множеств.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных(ые) единиц(ы) 72 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 5 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Аксиомы теории множеств.	5	1-4	2	2	0	
2.	Тема 2. Трансфинитная индукция.	5	5-8	6	6	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
3.	Тема 3. Обоснование стандартных математических объектов.	5	9-13	5	5	0	
4.	Тема 4. Кардинальные числа.	5	14 -17	5	5	0	
.	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	Зачет
	Итого			18	18	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Аксиомы теории множеств.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Аксиомы теории множеств. Тразитивный множества. Ординальные числа. Предельные ординалы. Множество натуральных чисел.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Аксиоматика Пеано. Аксиомы индукции. Индуктивные определения.

Тема 2. Трансфинитная индукция.

лекционное занятие (6 часа(ов)):

Трансфинитная индукция. Определения по трансфинитной индукции. Арифметика ординалов.

практическое занятие (6 часа(ов)):

Примеры определений по транзитивной индукции. Арифметические опреации на ординалах.

Тема 3. Обоснование стандартных математических объектов.

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Отношения эквивалентности. Факторизации с точки зрения теории множеств. Построение целых и рациональных чисел.

практическое занятие (5 часа(ов)):

Дедекиндовы сечения и последовательности Коши. Вещественные и комплексные числа.

Тема 4. Кардинальные числа.

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Теорема Кантора и теорема Кантора-Бернштейна о мощностях. Аксиома выбора. Лемма Цермело. Кардинальные числа. Функция Харстога. Континуум-гипотеза.

практическое занятие (5 часа(ов)):

Лемма Цорна. Примеры применения аксиомы выбора и леммы Цорна в различных разделах математики.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Аксиомы теории множеств.	5	1-4	подготовка домашнего задания	9	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
2.	Тема 2. Трансфинитная индукция.	5	5-8	подготовка к контрольной работе	9	контрольная работа
3.	Тема 3. Обоснование стандартных математических объектов.	5	9-13	подготовка домашнего задания	9	домашнее задание
4.	Тема 4. Кардинальные числа.	5	14 -17	подготовка к контрольной работе	9	контрольная работа
	Итого				36	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, экзамены.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Аксиомы теории множеств.

домашнее задание, примерные вопросы:

1. Обоснование конструкции упорядоченной пары множеств. 2. Доказать, что пересечение двух множеств является множеством. 3. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ и $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$? 4. Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B с помощью (многократно используемых) операций пересечения, объединения и разности? (Два выражения считаются одинаковыми, если они равны при любых значениях переменных.) Тот же вопрос для трёх множеств и для n множеств. 5. На окружности выбраны 1000 белых точек и одна чёрная. Чего больше ? треугольников с вершинами в белых точках или четырёхугольников, у которых одна вершина чёрная, а остальные три белые? 6. Докажите, что последовательностей длины n, составленных из нулей и единиц, столько же, сколько подмножеств у множества $\{1, 2, . . . , n\}$. 7. Докажите, что последовательностей нулей и единиц длины n, в которых число единиц равно k, равно числу k-элементных подмножеств n-элементного множества.

Тема 2. Трансфинитная индукция.

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Линейно и вполне упорядоченные множества. 2. Принцип полного упорядочения. 3. Характеризация вполне упорядоченных множеств. 4. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. 5. Кардиналы и мощность множества. 6. Доказать, что элемент ординала является ординалом. 7. Доказать, что omega является ординалом. 8. Докажите, что любой базис в пространстве R над полем Q имеет мощность континуума. 9. Докажите, что куб нельзя разрезать на части, из которых можно было бы составить правильный тетраэдр (независимо от объёма последнего). 10. Докажите, что всякий частичный порядок может быть продолжен до линейного. 11. Покажите, что любое бинарное отношение без циклов (цикл образуется, если xRx, или xRyRx, или xRyRzRx и т. д.) может быть продолжено до линейного порядка. 12. Докажите, что если A бесконечно, то множество A × N равномощно A. 13. Докажите, что сумма двух бесконечных мощностей равна их максимуму. 14. Докажите, что если A бесконечно, то A × A равномощно A. 15. Докажите, что любые два базиса в бесконечномерном векторном пространстве имеют одинаковую мощность. 16. Докажите, что точная верхняя грань счётного числа счётных ординалов счётна. 17. Выведите из аксиомы фундирования, что не существует множеств x, y, z, для которых x ∈ y ∈ z ∈ x. 18. Используя определение ординала как транзитивного множества с транзитивными элементами, докажите, что элемент ординала есть ординал. 19. Пусть α ? ординал (в смысле данного нами определения). Докажите, что отношение ∈ на нём является частичным порядком. 20. Докажите, что для любых элементов a, b ∈ α верно ровно одно из трёх соотношений: либо a ∈ b, либо a = b, либо b ∈ a. (Указание: используйте двойную индукцию по фундированному отношению ∈ на α, а также аксиому экстенсиональности.) 21. Докажите, что один ординал изоморфен собственному начальному отрезку другого тогда и только тогда, когда является его элементом. (Таким образом, отношение < на ординалах как упорядоченных множествах совпадает с отношением принадлежности.) 22. Докажите, что каждый ординал является множеством всех меньших его ординалов. 23. Для каких ординалов 1 + α = α? 24. Для каких ординалов 2 ? α = α? 25. Какие ординалы представимы в виде ω ? α? 26. Докажите, что если α + β = β + α для некоторых ординалов α и β, то найдётся такой ординал γ и такие натуральные числа m и n, что α = γm и β = γn. 27. Какие ординалы нельзя представить в виде суммы двух меньших ординалов?

Тема 3. Обоснование стандартных математических объектов.

домашнее задание , примерные вопросы:

1. Докажите, что всякое открытое и всякое замкнутое подмножество прямой является борелевским. (Указание: открытое множество есть объединение содержащихся в нём отрезков с рациональными концами.) 2. Докажите, что прообраз любого борелевского множества при непрерывном отображении является борелевским множеством. 3. Докажите, что семейство всех борелевских множеств имеет мощность континуума. 4. Пусть имеется счётное дерево, не имеющее бесконечных ветвей. Предположим, что в каждом его листе находится отрезок или дополнение до отрезка, а в каждой внутренней вершине стоит знак пересечения или объединения. Как сопоставить такому дереву некоторое борелевское множество? Покажите, что все борелевские множества могут быть получены таким способом. 5. Докажите, что семейство борелевских множеств имеет мощность континнума, используя ?бесконечные формулы? ? размеченные деревья, в которых нет бесконечных ветвей. 6. Докажите, что существует множество точек на плоскости, которое пересекается с каждой прямой ровно в двух точках.

Тема 4. Кардинальные числа.

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Докажите, что любые два интервала (a, b) и (c, d) на прямой равномощны. 2. Докажите, что любые две окружности на плоскости равномощны. Докажите, что любые два круга на плоскости равномощны. 3. Докажите, что множество точек строгого локального максимума любой функции действительного аргумента конечно или счётно. 4. Докажите, что множество точек разрыва неубывающей функции действительного аргумента конечно или счётно. 5. Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек на плоскости. 6. Докажите, что множество всех конечных последовательностей действительных чисел равномощно R (множеству всех действительных чисел). 7. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно R. 8. Докажите, что все геометрические фигуры, содержащие хотя бы кусочек прямой или кривой, равномощны. 9. Докажите, что если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку. 10. Докажите, что счётное множество имеет меньшую мощность, чем любое несчётное. 11. Проверьте аккуратно, что если A имеет меньшую мощность, чем B, а B имеет меньшую мощность, чем C, то A имеет меньшую мощность, чем C (транзитивность сравнения мощностей). 12. Покажите, что для всякого несчётного множества A ⊂ R можно указать точку a, любая окрестность которой пересекается с A по несчётному множеству. (Утверждение остаётся верным, если слова ?несчётное множество? заменить на ?множество мощности континуума?.) 13. Из плоскости выбросили произвольное счётное множество точек. Докажите, что оставшаяся часть плоскости линейно связна и, более того, любые две невыброшенные точки можно соединить двухзвенной ломаной, не задевающей выброшенных точек. 14. Могут ли для некоторой функции левая и правая обратные существовать, но быть различны? 15. Какова мощность множества всех непрерывных функций с действительными аргументами и значениями? Существенна ли здесь непрерывность? 16. Какова мощность множества всех монотонных функций с действительными аргументами и значениями? 17. Может ли семейство подмножеств натурального ряда быть несчётным, если любые два его элемента имеют конечное пересечение? конечную симметрическую разность?

Итоговая форма контроля

зачет (в 5 семестре)

Примерные вопросы к зачету:

1. Сравнение мощностей множеств. Теорема Шредера-Бернштейна.
2. Классы множеств. Парадокс Рассела. Аксиомы A0 и A1 теории Цермело-Френкеля.
3. Аксиома пары. Декартово произведение множеств. Аксиомы выделения, объединения и множества подмножеств.
4. Отношения.
5. Функции. Аксиома подстановки.
6. Мощность множества подмножеств. Несчетность континуума.
7. Аксиомы бесконечности и регулярности. Аксиома выбора.
8. Частично упорядоченные множества.
9. Вполне упорядоченные множества. Их сумма и произведение.
10. Порядковый тип вполне упорядоченного множества. Сравнение порядковых типов.
11. Ординалы. Определение и примеры.
12. Теоремы об ординалах.
13. Связь между ординалами и порядковыми числами. Предельные и изолированные ординалы.
14. Кардиналы. Определение и примеры.
15. Принципы трансфинитной индукции и рекурсии.
16. Построение кардиналов омега_альфа.
17. Мощности множеств и кардиналы. Теорема Цермело.
18. Конфинальные подмножества. Конфинальность.
19. Арифметические операции с кардиналами. Свойства операций.
20. Теорема о сумме и произведении кардиналов.

7.1. Основная литература:

1) Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник / Пруцков А.В., Волкова Л.Л. - М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 152 с.

[Электронный ресурс; Режим доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=558694]

2) Теория алгоритмов: Учебное пособие / В.И. Игошин. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 318 с.

[Электронный ресурс; Режим доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=241722]

3) Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие/ В.И. Игошин. - М.: КУРС: ИНФРА-М, 2017. - 392 с.

[Электронный ресурс; Режим доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=524332]

7.2. Дополнительная литература:

1) Бабенко, М.А. Введение в теорию алгоритмов и структур данных. [Электронный ресурс] / М.А. Бабенко, М.В. Левин. - Электрон. дан. - М. : МЦНМО, 2016. - 144 с. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/80136 - Загл. с экрана.

2) Глухов, М.М. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М.М. Глухов, А.Б. Шишков. - Электрон. дан. - СПб. : Лань, 2012. - 416 с. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/4041 - Загл. с экрана.

3) Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М.М. Глухов [и др.]. - Электрон. дан. - СПб. : Лань, 2008. - 112 с. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/112 - Загл. с экрана.

7.3. Интернет-ресурсы:

Дескриптивная теория множеств и теория вычислений - www.math.nsc.ru/conference/malmeet/12/selivanov.pdf

Лекции по математической логике и теории алгоритмов - ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/logic/sets/part1pdf.zip

Основные свойства теории множеств - http://lib.usue.ru/resource/free/10/MelnikovAlgebra3/00Set.pdf

Парадоксы теории множеств - http://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.20.pdf

Теория множеств. Видеолекция - http://www.youtube.com/watch?v=UACoqVGWO6Q

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Теория множеств" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Аудитории для лекций и практических занятий. Рекомендованная для освоения курса литература, компьютеры, ксерокс, проектор.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):
Калимуллин И.Ш. ____________________
"__" _________ 201 __ г.

Рецензент(ы):
Киндер М.И. ____________________
"__" _________ 201 __ г.