

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Теория чисел Б1.В.ОД.7

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Арсланов М.М.

**Рецензент(ы):**

Файзрахманов М.Х.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Арсланов М. М.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_\_ от "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_\_ от "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Арсланов М.М. Кафедра алгебры и математической логики отделение математики ,  
Marat.Arslanov@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Теория чисел" являются:

1. Освоение методов исследования и решения уравнений в целых числах.
2. Изучение свойств простых и составных чисел, законов распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях.
3. Изучение структуры колец классов вычетов по натуральному модулю и методов решения сравнений.
4. Изучение арифметики в полях алгебраических чисел, ее применений к решению уравнений в целых числах, исследованию свойств неалгебраических чисел.
5. Изучение приближений действительных чисел рациональными дробями и методов построения наилучших приближений.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ОД.7 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.01 Математика и относится к обязательным дисциплинам. Осваивается на 2 курсе, 3 семестр.

Курс "Теория чисел" входит в цикл профессиональных дисциплин в базовой части. Она является логическим продолжением базовых профессиональных курсов алгебры и математического анализа. С методической точки зрения она хорошо иллюстрирует общие теоремы и конструкции этих базовых дисциплин на примерах исследования свойств конкретных объектов - целых чисел. Знания, полученные после изучения этой дисциплины, позволяют ориентироваться в различных направлениях практической деятельности, связанных с дискретной математикой, защитой информации, компьютерными науками. В качестве входных знаний необходимы основы алгебры и математического анализа.

Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата: Б3.В.4 Дисциплина изучается на 2 курсе, 4 семестр.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции                        | Расшифровка приобретаемой компетенции   |
|---|---|
| ОК-7<br>(общекультурные компетенции)    | способностью к самоорганизации и самообразованию  |
| ПК-23<br>(профессиональные компетенции) | способностью применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

Свойства простых и составных чисел, законы распределения простых чисел в натуральном ряде, свойства колец классов вычетов по натуральным модулям, основные свойства алгебраических расширений поля рациональных чисел и конечных полей, свойства арифметических функций.

2. должен уметь:

Решать линейные и квадратичные уравнения от нескольких переменных, системы линейных уравнений в целых числах. Устанавливать разрешимость и находить решения алгебраических сравнений и систем сравнений, показательных сравнений. Находить системы первообразных корней. Вычислять значения арифметических функций. Строить рациональные приближения к действительным числам.

3. должен владеть:

Современными теоретико-числовыми алгоритмами.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

Свойства простых и составных чисел, законы распределения простых чисел в натуральном ряде, свойства колец классов вычетов по натуральным модулям, основные свойства алгебраических расширений поля рациональных чисел и конечных полей, свойства арифметических функций.

Решать линейные и квадратичные уравнения от нескольких переменных, системы линейных уравнений в целых числах. Устанавливать разрешимость и находить решения алгебраических сравнений и систем сравнений, показательных сравнений. Находить системы первообразных корней. Вычислять значения арифметических функций. Строить рациональные приближения к действительным числам.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 3 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                              |                             | Текущие формы<br>контроля |
|----|---|---------|--------------------|---|------------------------------|-----------------------------|---------------------------|
|    |   |         |                    | Лекции  | Практи-<br>ческие<br>занятия | Лабора-<br>торные<br>работы |                           |
| 1. | Тема 1. Свойства простых и составных чисел. Решение линейных уравнений. Теорема Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы. | 3       | 1-4                | 6   | 0                            | 8                           | Контрольная работа        |

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                              |                        | Текущие формы<br>контроля   |
|----|--|---------|--------------------|---|------------------------------|------------------------|-----------------------------|
|    |  |         |                    | Лекции  | Практи-<br>ческие<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                             |
| 2. | Тема 2. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.   | 3       | 5-8                | 6   | 0                            | 6                      | Письменное домашнее задание |
| 3. | Тема 3. Сравнения. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Характеры. L-функции Дирихле. Простые числа в арифметических прогрессиях. | 3       | 9-12               | 6   | 0                            | 6                      | Контрольная работа          |
| 4. | Тема 4. Алгебраические числа   | 3       | 13-16              | 6   | 0                            | 6                      | Устный опрос                |
| 5. | Тема 5. Диофантовы приближения и трансцендентные числа.  | 3       | 17-20              | 6   | 0                            | 6                      | Устный опрос                |
| .  | Тема . Итоговая форма контроля   | 3       |                    | 0   | 0                            | 0                      | Зачет                       |
|    | Итого  |         |                    | 30  | 0                            | 32                     |                             |

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Свойства простых и составных чисел. Решение линейных уравнений. Теорема Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Свойства простых и составных чисел. Решение линейных уравнений. Теорема Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы.

**лабораторная работа (8 часа(ов)):**

Решение задач на свойства простых чисел, вычисление количества простых чисел в прогрессиях

**Тема 2. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Исследование дзета-функции Римана и изучение асимптотического закона распределения простых чисел.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Решение задач по приложениям дзета-функции Римана. Диофантовы уравнения и их связь с гипотезой Эйлера.

**Тема 3. Сравнения. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Характеры. L-функции Дирихле. Простые числа в арифметических прогрессиях.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Основные свойства сравнений по заданному модулю. Доказательство теоремы Эйлера и малой теоремы Ферма. Характеры. L-функции Дирихле. Количество простых чисел в арифметических прогрессиях.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Решение уравнений по заданному модулю, системы уравнений.

**Тема 4. Алгебраические числа**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Доказательство того, что алгебраические числа образуют поле. Существование трансцендентных чисел. Теорема Дирихле.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Решение задач о свойствах алгебраических чисел, на доказательство алгебраичности конкретных чисел.

**Тема 5. Диофантовы приближения и трансцендентные числа.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

О диофантовых приближениях и трансцендентных числах, об их свойствах. Трансцендентность чисел  $\pi$  и  $e$ .

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Решение задач о диофантовых приближениях и трансцендентных числах, об их свойствах.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

| N  | Раздел дисциплины   | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|----|---|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 1. | Тема 1. Свойства простых и составных чисел. Решение линейных уравнений. Теорема Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы. | 3       | 1-4             | подготовка к контрольной работе       | 9                      | контрольная работа                    |
| 2. | Тема 2. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.  | 3       | 5-8             | подготовка домашнего задания          | 9                      | домашнее задание                      |
| 3. | Тема 3. Сравнения. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Характеры. L-функции Дирихле. Простые числа в арифметических прогрессиях.                | 3       | 9-12            | подготовка к контрольной работе       | 9                      | контрольная работа                    |

| №  | Раздел дисциплины                                       | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|----|---|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 4. | Тема 4. Алгебраические числа                            | 3       | 13-16           | подготовка к устному опросу           | 9                      | устный опрос                          |
| 5. | Тема 5. Диофантовы приближения и трансцендентные числа. | 3       | 17-20           | подготовка к устному опросу           | 10                     | устный опрос                          |
|    | Итого   |         |                 |                                       | 46                     |                                       |

### 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, зачет.

### 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

#### Тема 1. Свойства простых и составных чисел. Решение линейных уравнений. Теорема Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы.

контрольная работа , примерные вопросы:

Задачи на свойства простых и составных чисел. Решение линейных уравнений, теоремы Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы.

#### Тема 2. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.

домашнее задание , примерные вопросы:

Задачи на асимптотический закон распределения простых чисел.

#### Тема 3. Сравнения. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Характеры. L-функции Дирихле. Простые числа в арифметических прогрессиях.

контрольная работа , примерные вопросы:

Задачи на свойства сравнений, теорему Эйлера и малой теоремы Ферма, на простые числа в арифметических прогрессиях

#### Тема 4. Алгебраические числа

устный опрос , примерные вопросы:

Свойства алгебраических чисел, они образуют поле, алгебраичность конкретных чисел.

#### Тема 5. Диофантовы приближения и трансцендентные числа.

устный опрос , примерные вопросы:

Опрос о диофантовых приближениях и трансцендентных числах

#### Итоговая форма контроля

зачет (в 3 семестре)

Примерные вопросы к итоговой форме контроля

1. Свойства простых и составных чисел.

2. Простые числа в арифметических прогрессиях.
3. Теорема Фробениуса.
4. Решение линейных уравнений по заданному модулю.
5. Теорема Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы.
6. Дзета-функция Римана.
7. Асимптотический закон распределения простых чисел.
8. Сравнения. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма.
9. Квадратичные вычеты. Закон взаимности.
10. Характеры.
11. L-функции Дирихле.
12. Решения уравнений в простых числах.
13. Алгебраические числа
14. Диофантовы приближения
15. Трансцендентные числа. Теоремы существования и примеры.

### 7.1. Основная литература:

1. Виноградов, И.М. Основы теории чисел : учебное пособие / И.М. Виноградов. - 12-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. - 176 с. - ISBN 978-5-8114-0535-0. - Текст: электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/46>
2. Бухштаб, А.А. Теория чисел [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.А. Бухштаб. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 384 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65053>
3. Смолин, Ю.Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. - 5-е изд., стер. - Москва : ФЛИНТА, 2017. - 464 с. - ISBN 978-5-9765-0050-1. - Текст : электронный. - URL: <http://znanium.com/catalog/product/1034573>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Манин, Ю.И. Введение в современную теорию чисел / Ю.И. Манин, А.А. Панчишкин. - Москва : МЦНМО, 2009. - 552 с. - ISBN 978-5-94057-511-5. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/9368>
2. Ермолаева, Н.Н. Практические занятия по алгебре. Элементы теории множеств, теории чисел, комбинаторики. Алгебраические структуры : учебное пособие / Н.Н. Ермолаева, В.А. Козынченко, Г.И. Курбатова ; под редакцией Г.И. Курбатовой. - Санкт-Петербург: Лань, 2014. - 112 с. - ISBN 978-5-8114-1657-8. - Текст : электронный // Электронно-библиотечная система 'Лань' : [сайт]. - URL: <https://e.lanbook.com/book/49469>

### 7.3. Интернет-ресурсы:

Национальный Открытый Университет 'ИНТУИТ' - <http://www.intuit.ru/>  
Портал КФУ - [www.kpfu.ru](http://www.kpfu.ru)  
Свободная система компьютерной алгебры Maxima - <http://maxima.sourceforge.net/ru/>  
Система дистанционного обучения КФУ - <http://tulpar.kfu-elearning.ru>  
ЭБС 'Знаниум' - <http://znanium.com/>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Теория чисел" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:



Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Аудитории для лекций и практических занятий. Рекомендованная для освоения курса литература, компьютеры, ксерокс, проектор.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):

Арсланов М.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Файзрахманов М.Х. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.