

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

"       " 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Метод конечных элементов решения эллиптических задач Б1.В.ДВ.23

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Даутов Р.З.

**Рецензент(ы):**

Соловьев С.И.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК № \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" 201\_\_ г

Регистрационный №

## **Содержание**

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Даутов Р.З. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики , Rafaيل.Dautov@gmail.com

## **1. Цели освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины 'Метод конечных элементов решения эллиптических задач' является подготовка квалифицированных специалистов в области применения метода конечных элементов для моделирования полей различной физической природы, описываемых уравнениями математической физики.

## **2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования**

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.23 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 6 семестр.

Данная дисциплина базируется на дисциплинах 'Алгебра и геометрия', 'Математический анализ', 'Дополнительные главы математической физики'.

## **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля**

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-2 (профессиональные компетенции)	Способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии
ПК-10 (профессиональные компетенции)	Готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач, способностью применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов
ПК-11 (профессиональные компетенции)	Способность применять существующие и разрабатывать новые методы и средства обучения
ПК-12 (профессиональные компетенции)	Способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальной математики
ПК-9 (профессиональные компетенции)	Способность составлять и контролировать план выполняемой работы, планировать необходимые для выполнения работы ресурсы, оценивать результаты собственной работы

В результате освоения дисциплины студент:

### **1. должен знать:**

теоретические знания о понятиях и задачах, связанных с аппроксимацией функциональных пространств Соболева.

### **2. должен уметь:**

понимать и применять на практике компьютерные технологии для решения различных задач линейной алгебры и уравнений задач математической физики

3. должен владеть:

навыками самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с численным решением краевых задач математической физики методом конечных элементов.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

применять полученные знания и навыки в своей профессиональной деятельности

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практи- ческие занятия	Лабора- торные работы	
1.	Тема 1. Элементарное введение в метод конечных элементов	6		4	0	0	
2.	Тема 2. Обобщенные решения краевых задач	6		6	0	0	
3.	Тема 3. Пространства конечных элементов	6		12	0	0	
4.	Тема 4. Метод конечных элементов для эллиптических уравнений	6		10	0	0	
5.	Тема 5. Численное интегрирование в методе конечных элементов	6		4	0	0	
6.	Тема 6. Комплекс MatLab функций pdetool для решения краевых задач	6		0	0	10	
7.	Тема 7. Триангуляция плоских областей	6		0	0	4	
8.	Тема 8. Программная реализация метода конечных элементов для решения модельной двумерной краевой задачи	6		0	0	6	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практи- ческие занятия	Лабора- торные работы	
9.	Тема 9. Визуализация сеток и решений краевых задач	6		0	0	4	
10.	Тема 10. Программная реализация метода конечных элементов для эллиптических задач общего вида	6		0	0	12	
.	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	Экзамен
	Итого			36	0	36	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Элементарное введение в метод конечных элементов

#### лекционное занятие (4 часа(ов)):

Формулировка первой краевой задачи для одномерного дифференциального уравнения второго порядка. Вывод интегрального тождества. Пространство лагранжевых сплайнов первой степени. Определение схемы метода конечных элементов (МКЭ). Матричная формулировка схемы. Единственность решения. Оценка точности решения в равномерной норме.

### Тема 2. Обобщенные решения краевых задач

#### лекционное занятие (6 часа(ов)):

Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала. Корректность обобщенной задачи.

### Тема 3. Пространства конечных элементов

#### лекционное занятие (12 часа(ов)):

п-мерная задача интерполяции. Разрешимость задачи интерполяции. Базис Лагранжа. Оператор интерполяции. Определение конечного элемента. Базисный конечный элемент. Одномерный лагранжев элемент степени m. Лагранжев прямоугольный элемент степени m. Лагранжев треугольный конечный элемент степени m. Определение и свойства ассоциированных элементов. Аффинно-эквивалентные конечные элементы. Треугольный изопараметрический элемент с одной криволинейной границей. Пространство лагранжевых треугольных элементов степени m. Аппроксимация пространства Соболева первого порядка. Учет однородных краевых условий условий Дирихле. Конструкция базиса Лагранжа в пространстве конечных элементов.

### Тема 4. Метод конечных элементов для эллиптических уравнений

#### лекционное занятие (10 часа(ов)):

Метод конечных элементов для эллиптических уравнений как вариант метода Галеркина. Разрешимость схем. Матричная формулировка схемы МКЭ. Алгоритмы сборки матрицы жесткости и вектора сил. Вычисление локальной матрицы жесткости и локального вектора сил на примере лагранжевых элементов. Абстрактная оценка точности схемы МКЭ. Лемма Брамбла-Гильберта. Оценки погрешности интерполяции на базисном конечном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинно-эквивалентных элементов. Регулярность триангуляции. Оценка точности схемы МКЭ.

### Тема 5. Численное интегрирование в методе конечных элементов

### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных областей. Схемы МКЭ с численным интегрированием для многоугольных областей. Условия разрешимости схем в случае аффинно-эквивалентных треугольных элементов. Лемма Стренга. Оценка точности схемы МКЭ с численным интегрированием в случае аффинно-эквивалентных треугольных элементов.

### **Тема 6. Комплекс MatLab функций pdetool для решения краевых задач**

#### **лабораторная работа (10 часа(ов)):**

Структура пакета программ pdetool. Решение простейшей двумерной задачи эллиптического типа. О схеме МКЭ, реализованном в пакете. Определение геометрии области. Построение сеток в пакете pdetool. Кодировка сеток в pdetool. Определение уравнений. Задание краевых и начальных условий. Решение задачи. Виды графического представления решения. Экспорт данных и решения в MatLab. Комментарии к лабораторной работе.

### **Тема 7. Триангуляция плоских областей**

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Способы задания двумерных областей в ЭВМ. Обзор методов их триангуляции. Информация о триангуляции, необходимая для программирования метода конечных элементов. Возможные схемы кодировки сеток. Программная реализация триангуляций канонических областей. Изучение и практическая работа с функцией initmesh.

### **Тема 8. Программная реализация метода конечных элементов для решения модельной двумерной краевой задачи**

#### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Программирование МКЭ на основе Р1 элементов. Создание и хранение разреженных матриц. Программирование рассылки элементов. Рассылка элементов локальных матриц жесткости. Рассылка элементов локальных векторов сил. Векторизация рассылки. Формирование системы МКЭ для Р1 элементов для уравнения Пуассона. Учет краевых условий Дирихле. Решение тестовых задач.

### **Тема 9. Визуализация сеток и решений краевых задач**

#### **лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Программирование визуализации триангуляций плоских областей. Выделение узлов, элементов и граней. Построение и программирование трехмерных графиков и линий уровня решений краевых задач.

### **Тема 10. Программная реализация метода конечных элементов для эллиптических задач общего вида**

#### **лабораторная работа (12 часа(ов)):**

Формирование системы МКЭ для Р1 элементов для эллиптического уравнения общего вида при произвольных краевых условиях. Способы задания коэффициентов уравнения и краевых условий. Расчетные формулы для элементов локальных матриц жесткости и вектора сил для Р1 элементов. Программирование вклада элементов в систему МКЭ. Учет краевых условий. Формирование системы МКЭ. Решение тестовых задач. Измерение погрешности решения.

### **4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел дисциплины	Се-мestr	Нед-ля семе-стра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудо-емкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
6.	Тема 6. Комплекс MatLab функций pdetool для решения краевых задач	6		Разработка компьютерной программы	6	лабораторная работа

N	Раздел дисциплины	Се-мestr	Неде-ля семе-стра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудо-емкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
7.	Тема 7. Триангуляция плоских областей	6		Разработка компьютерной программы	2	Компьютерная программа
8.	Тема 8. Программная реализация метода конечных элементов для решения модельной двумерной краевой задачи	6		Разработка компьютерной программы	2	Компьютерная программа
9.	Тема 9. Визуализация сеток и решений краевых задач	6		Разработка компьютерной программы	2	Компьютерная программа
10.	Тема 10. Программная реализация метода конечных элементов для эллиптических задач общего вида	6		Разработка компьютерной программы	6	Компьютерная программа
Итого					18	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лекционных и лабораторных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Необходимый теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект, который остается у студента в результате прослушивания материала не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Дополнительно полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

**Тема 1. Элементарное введение в метод конечных элементов**

**Тема 2. Обобщенные решения краевых задач**

**Тема 3. Пространства конечных элементов**

## **Тема 4. Метод конечных элементов для эллиптических уравнений**

### **Тема 5. Численное интегрирование в методе конечных элементов**

### **Тема 6. Комплекс MatLab функций pdetool для решения краевых задач**

лабораторная работа, примерные вопросы:

Решение заданной краевой задачи в системе MatLab с помощью комплекса pdetool  
(выполнение лабораторной работы.)

### **Тема 7. Триангуляция плоских областей**

Компьютерная программа, примерные вопросы:

Программа триангуляции заданной двумерной области.

### **Тема 8. Программная реализация метода конечных элементов для решения модельной двумерной краевой задачи**

Компьютерная программа, примерные вопросы:

Набор программ для реализации метода конечных элементов на основе линейных элементов для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Программы вычисления погрешности решения при решении тестовых задач.

### **Тема 9. Визуализация сеток и решений краевых задач**

Компьютерная программа, примерные вопросы:

Набор программ визуализации триангуляций плоских областей, позволяющих выделить узлы, элементы и грани элементов треугольной и четырехугольной формы. Программа построения трехмерных графиков решений краевых задач на основе линейных треугольных и четырехугольных элементов.

### **Тема 10. Программная реализация метода конечных элементов для эллиптических задач общего вида**

Компьютерная программа, примерные вопросы:

Программы формирования и решения системы МКЭ для P1 элементов для эллиптического уравнения общего вида при произвольных краевых условиях.

### **Итоговая форма контроля**

экзамен (в 6 семестре)

Примерные вопросы к итоговой форме контроля

#### A) Примерные вопросы для экзамена

Постановка краевой задачи в вариационном виде. Метод Галеркина аппроксимации вариационной задачи в гильбертовом пространстве.

Основные аспекты метода Галеркина: выбор аппроксимирующего подпространства, выбор базиса, генерирование системы

линейных алгебраических уравнений, ее решение прямым или итерационным методом.

Понятие конечного элемента в одномерном, двумерном, общем случае. Триангуляция расчетной области, условие регулярности семейства триангуляций.

Пространства конечных элементов. Локальный и глобальный базис. Локальная и глобальная интерполяция, оценки погрешности интерполяции.

Аппроксимация конечными элементами функций пространств Соболева, оценки погрешности аппроксимации. Применение пространств конечных элементов

для аппроксимации краевых задач. Локальные и глобальные матрицы жесткости и вектора сил. Алгоритмы сборки систем МКЭ.

Учет существенных и естественных краевых условий в вариационной постановке задачи. Учет существенных и естественных краевых условий в системе МКЭ.

Оценка точности схемы МКЭ на основе аффинно-эквивалентных элементов.

#### B) Примеры экзаменационных билетов.

Билет 1.

1. Обобщенная формулировка краевой задачи Дирихле для уравнения второго порядка.

2. Интерполяция Лагранжа в  $R^n$ . Базис Лагранжа.

Билет 2.

1. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. .

2. Вывод интегрального тождества для смешанной краевой задачи для уравнения второго порядка.

Билет 3.

1. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.

2. Метод Галеркина. Система алгебраических уравнений метода Галеркина.

Билет 4.

1. Алгоритм сборки системы МКЭ.

2. Метод МКЭ на основе аффинных элементов степени  $m$ . Оценка точности схемы.

Билет 5.

1. Схема МКЭ с численным интегрированием на основе линейных элементов. Разрешимость схемы

2. Алгоритм вычисления локальных матриц жесткости и векторов сил для линейных треугольных элементов.

## **7.1. Основная литература:**

1. Даутов Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов: учебное пособие для студентов высших учебных заведений,

обучающихся по специальности 'Прикладная математика и информатика' и по направлению 'Прикладная математика и информатика' /

Р. З. Даутов , М. М. Карчевский.-Изд. 2-е, испр..-Казань: Казанский университет, 2011.-237 с.: ил.; 21.-

Библиогр.: с. 228-229 (25 назв.).-Предм. Указ.: с. 234-237.-ISBN 978-5-98180-993-4.

2. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов:  
[Учебное пособие]. - Казань: Казанский университет. 2012. - 240 с. (с грифом УМО). - Режим доступа: [http://kpfu.ru/publication?p\\_id=47325](http://kpfu.ru/publication?p_id=47325)

3. Даутов Р.З. Метод Галеркина с возмущениями для задач на собственные значения.  
[Учебное пособие]. - Казань, 2010. - 94 с.

Режим доступа: [http://kpfu.ru/publication?p\\_id=21045](http://kpfu.ru/publication?p_id=21045)

4. Самогин, Ю.Н. Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю.Н. Самогин, В.Е. Хроматов, В.П. Чирков. - Электрон. Дан. - М. : Физматлит, 2012. - 200 с. - Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=59633](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59633) - Загл. С экрана.

5. Киреев, В.И. Численные методы в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. - Электрон. Дан. - СПб. : Лань, 2015. -448 с.- Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=65043](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65043) - Загл. С экрана.

## **7.2. Дополнительная литература:**

1. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. - 736 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/400>

2. Шевцов, Г.С. Численные методы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебное пособие / Г.С. Шевцов, О.Г. Крюкова, Б.И. Мызникова. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург : Лань, 2011. - 496 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/1800>

3. Демидович, Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург : Лань, 2010. - 400 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/537>

4. Срочко, В.А. Численные методы. Курс лекций [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.А. Срочко. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург : Лань, 2010. - 208 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/378>

### **7.3. Интернет-ресурсы:**

Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал образовательных математических ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Сайт образовательных ресурсов по математике - <http://www.exponenta.ru/>

Сайт с учебными материалами по математике - <http://mathhelp.spb.ru>

### **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Метод конечных элементов решения эллиптических задач" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Лекционные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом или маркером.

Лабораторные занятия по дисциплине проводятся в компьютерном классе, оснащенной доской и мелом или маркером.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Даутов Р.З. \_\_\_\_\_

"\_\_" 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Соловьев С.И. \_\_\_\_\_

"\_\_" 201\_\_ г.