

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Д. А. Таюрский

» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

## Программа дисциплины

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Плещинский Н.Б. (Кафедра прикладной математики, отделение прикладной математики и информатики), Nikolai.Pleshchinskii@kpfu.ru

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО**

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

| Шифр компетенции | Расшифровка приобретаемой компетенции  |
|------------------|--|
| ОПК-2            | Способность использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования   |
| ПК-3             | Способность и готовность демонстрировать знания современных языков программирования, операционных систем, офисных приложений, Интернета, способов и механизмов управления данными; принципов организации, состава и схемы работы операционных систем |

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

- обладать теоретическими знаниями в области исследования свойств и разработки методов решения экстремальных задач

Должен уметь:

- ориентироваться в современных методах решения экстремальных задач;

Должен владеть:

- понимать основные принципы постановки и исследования экстремальных задач математического моделирования и математической физики;

Должен демонстрировать способность и готовность:

приобрести навыки решения типовых задач вариационного исчисления и оптимального управления.

**2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО**

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.12 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.04 "Прикладная математика (Математическое моделирование)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 4 курсе в 8 семестре.

**3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных(ые) единиц(ы) на 72 часа(ов).

Контактная работа - 40 часа(ов), в том числе лекции - 0 часа(ов), практические занятия - 0 часа(ов), лабораторные работы - 40 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 32 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 0 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 8 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

| N  | Разделы дисциплины / модуля | Семестр | Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах) |                      |                     | Самостоятельная работа |
|----|-----------------------------|---------|--|----------------------|---------------------|------------------------|
|    |                             |         | Лекции   | Практические занятия | Лабораторные работы |                        |
| 1. | Тема 1. Постановка задач    |         |  |                      |                     |                        |

оптимального управления

| N  | Разделы дисциплины / модуля   | Семестр | Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах) |                      |                     | Самостоятельная работа |
|----|---|---------|--|----------------------|---------------------|------------------------|
|    |   |         | Лекции   | Практические занятия | Лабораторные работы |                        |
| 2. | Тема 2. Классическое вариационное исчисление                        | 8       | 0  | 0                    | 4                   | 4                      |
| 3. | Тема 3. Интегральное вариационное исчисление                        | 8       | 0  | 0                    | 4                   | 4                      |
| 4. | Тема 4. Дифференцирование отображений                               | 8       | 0  | 0                    | 4                   | 4                      |
| 5. | Тема 5. Гладкие задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств | 8       | 0  | 0                    | 4                   | 4                      |
| 6. | Тема 6. Оптимизация в бесконечномерных пространствах                | 8       | 0  | 0                    | 4                   | 4                      |
| 7. | Тема 7. Принцип максимума Понтрягина                                | 8       | 0  | 0                    | 4                   | 4                      |
| 8. | Тема 8. Динамическое программирование Беллмана                      | 8       | 0  | 0                    | 12                  | 4                      |
|    | Итого   |         | 0  | 0                    | 40                  | 32                     |

## 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

### Тема 1. Постановка задач оптимального управления

Основные понятия и терминология. Абстрактная экстремальная задача. Состояние и управление, уравнение состояний. Два подхода к решению задач оптимального управления. Примеры экстремальных задач. Задача о брахистохроне. Задача Дидоны. Оптимальное распределение нагрузки вдоль упругой струны. Оптимальное управление температурой стержня. Простейшая задача о быстродействии.

### Тема 2. Классическое вариационное исчисление

Простейшая задача классического вариационного исчисления. Лемма Лагранжа и лемма Дюбуа-Реймона. Необходимое условия экстремума в форме уравнения Эйлера. Необходимое условие экстремума в задаче Больца. Изопериметрическая задача. Правило множителей Лагранжа. Задача с подвижными концами. Пример Гильберта. Расширение класса искомых функций.

### Тема 3. Интегральное вариационное исчисление

Простейшая задача интегрального вариационного исчисления. Основная лемма и аналог леммы Дюбуа-Реймона. Необходимое условие экстремума

в форме интегрального уравнения. Условие линейности интегрального уравнения. Теоремы Фредгольма. Изопериметрическая задача. Распределение нагрузки вдоль упругой струны. Расширение класса искомых функций. Аналог задачи Больца.

### Тема 4. Дифференцирование отображений

Некоторые сведения из функционального анализа в нормированных пространствах. Производные отображений: вариация по Лагранжу, слабая и сильная производные. Правила дифференцирования. Теорема о суперпозиции и теорема о среднем. Дифференцирование в произведении пространств. Теорема о полном дифференциале. Оператор Немыцкого. Производные интегральных функционалов.

### Тема 5. Гладкие задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств

Необходимое условие первого порядка. Формула Тейлора. Необходимое условие второго порядка. Достаточное условие экстремума второго порядка. Правило множителей Лагранжа в конечномерном случае. Правило множителей Лагранжа в бесконечномерном случае. Условия дополняющей нежесткости и условия неотрицательности. Примеры экстремальных задач и их решение.

### Тема 6. Оптимизация в бесконечномерных пространствах

Бесконечномерное линейное программирование. Градиентные методы: метод проекции градиента, метод условного градиента, метод Ньютона-Канторовича и другие методы. Правила выбора шага в градиентных методах. Задача оптимального управления с линейным уравнением состояний и квадратичным функционалом. Задача об оптимальном управлении температурой стержня.

### Тема 7. Принцип максимума Понтрягина

Основная идея метода динамического программирования. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана. Примеры. Алгоритм метода динамического программирования и его программная реализация.

Принцип максимума Понтрягина. Задача оптимального управления с закрепленным временем и свободным концом. Общий случай задачи оптимального управления. Простейшая задача о быстродействии.

## **Тема 8. Динамическое программирование Беллмана**

Аппроксимация и интерполяция. Аппроксимирующие пространства и операторы. Аппроксимация двойственности. Аппроксимация двойственных пространств и двойственных операторов. Аппроксимационные диаграммы. Абстрактное линейное программирование. Пример: задача о распределении нагрузки вдоль упругой струны. Общая экстремальная задача. Последовательность минимизирующих элементов

## **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

### 8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Математические методы - <http://znanium.com/bookread.php?book=137102>

Модели оптимального управления - <http://znanium.com/bookread.php?book=4923623>

Монография Ю.П.Петрова - <http://znanium.com/bookread.php?book=350744>

Очерки истории управления - <http://znanium.com/bookread.php?book=350298>

сайт Н.Б.Плещинского - [www.abcpnb.ru](http://www.abcpnb.ru)

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

| Вид работ              | Методические рекомендации   |
|------------------------|---|
| лабораторные работы    | При выполнении лабораторных работ необходимо использовать теоретический материал, делать ссылки на соответствующие теоремы, свойства, формулы и пр. Решение задач излагается подробно и содержит необходимые пояснительные ссылки. Текущие задания на лабораторные работы выдаются каждую неделю на практическом занятии. Индивидуальные домашние задания выдаются на практических занятиях в начале изучения соответствующих тем.  |
| самостоятельная работа | Предусмотрена систематическая самостоятельная работа студентов над теоретическим материалом, текстами рекомендованных учебников и учебных пособий; развитие навыков самоконтроля, способствующих интенсификации учебного процесса. Студентам следует стремиться к активизации знаний на занятиях по другим естественно-научным дисциплинам, связанным с данным курсом. При работе с примерами необходимо стремиться не только к узнаванию алгоритма решения каждой конкретной задачи, но и к пониманию цели его употребления в данном контексте, функциональной нагрузки, которой данный пример обладает. Самостоятельная работа по изучению курса предполагает внеаудиторную работу. Этапы выполнения самостоятельных работ: 1. Просмотр учебного пособия и рекомендуемой литературы по теме задания. 2. Составление резюме прочитанной главы соответствующего раздела рекомендуемого теоретического источника или учебника. 3. Выполнение заданий по теме и их комментирование. |
| зачет                  | При подготовке к зачету обучающемуся рекомендуется составить план процесса подготовки, включающей изучение, повторение, систематизацию, логическую обработку материала, анализ полученной информацией с выявлением возможных следствий и неявных свойств объектов, составлением списка возможных дополнительных вопросов и заданий, подготовку к выполнению практических задач по темам дисциплины.   |

### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

## **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки "Математическое моделирование".



Приложение 2  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.12 Вариационное исчисление и оптимальное  
управление

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

**Основная литература:**

1. Романко, В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.К. Романко. ? Электрон. дан. ? Москва : Издательство 'Лаборатория знаний', 2015. ? 347 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/70785>
2. Авербух Ю.В. Простейшие задачи вариационного исчисления: Учебно-методическое пособие / Авербух Ю.В., Сережникова Т.И., - 2-е изд., стер. - М.:Флинта, 2018. - 41 с.: ISBN 978-5-9765-3510-7 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/965914>
3. Матвеев А.С. Введение в математическую теорию оптимального управления: Учебник / Матвеев А.С. - СПб:СПбГУ, 2018. - 194 с.: ISBN 978-5-288-05809-7 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/1001189>

**Дополнительная литература:**

1. Галеев, Э.М. Оптимальное управление [Электронный ресурс] : монография / Э.М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин. ? Электрон. дан. ? Москва : МЦНМО, 2008. ? 320 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9316>
2. Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Электронный ресурс] : Учеб. пособие / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - 3-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 256 с. - ISBN 978-5-9221-0992-5. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/544748>
3. Гюнтер, Н.М. Курс вариационного исчисления [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.М. Гюнтер. ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2009. ? 320 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/119>
4. Абдрахманов, В.Г. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Г. Абдрахманов, А.В. Рабчук. ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2014. ? 112 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/45675>

Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.12 Вариационное исчисление и оптимальное  
управление

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.