

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Абстрактные приближенные схемы Б1.В.ДВ.11

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Плещинский Н.Б.

**Рецензент(ы):**

Бахтиева Л.У.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Плещинский Н. Б.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2019

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Плещинский Н.Б.  
Кафедра прикладной математики отделение прикладной математики и информатики ,  
Nikolai.Pleshchinskii@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

В специальном курсе лекций рассматриваются основные принципы построения приближенных схем, которые используются при аппроксимации граничных задач для дифференциальных уравнений и интегральных уравнений. Излагается абстрактный подход, основанный на общей теории линейных операторов. В качестве примеров применения теории аппроксимации и интерполяции приводятся интегральные уравнения Фредгольма, бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, задача Коши и краевые задачи для уравнений математической физики, а также экстремальные задачи.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.11 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 6 семестр.

Дисциплина по выбору Б3.ДВ.1 "Абстрактные приближенные схемы" относится к профессиональному циклу дисциплин, предназначена для студентов 4 курса (7 семестр). Базируется на знаниях, полученных в рамках дисциплин "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения", "Уравнения математической физики", "Численные методы".

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции                       | Расшифровка приобретаемой компетенции  |
|--|--|
| ПК-6<br>(профессиональные компетенции) | способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников       |
| ПК-8<br>(профессиональные компетенции) | способность формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные принципы построения и исследования приближенных схем;

2. должен уметь:

выбирать оптимальные варианты выбора способов аппроксимации операторных уравнений;

3. должен владеть:

приемами доказательства сходимости приближенных схем;

4. должен продемонстрировать способность и готовность:

навыки численного решения граничных задач для дифференциальных уравнений и интегральных уравнений

### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю Тематический план дисциплины/модуля

| N   | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля                     | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля   |
|-----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|-----------------------------|
|     |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                             |
| 1.  | Тема 1. Введение в теорию абстрактных схем          | 6       | 1-2                | 4   | 0                       | 0                      |                             |
| 2.  | Тема 2. Операторы и операторные уравнения           | 6       | 3-4                | 4   | 0                       | 0                      |                             |
| 3.  | Тема 3. Условия единственности решений              | 6       | 5-6                | 4   | 0                       | 0                      | Контрольная работа          |
| 4.  | Тема 4. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода | 6       | 7-8                | 4   | 0                       | 0                      | Письменное домашнее задание |
| 5.  | Тема 5. Существование решений                       | 6       | 9-10               | 4   | 0                       | 0                      | Письменное домашнее задание |
| 6.  | Тема 6. Сходимость приближенной схемы               | 6       | 11-12              | 4   | 0                       | 0                      |                             |
| 7.  | Тема 7. Метод усечения БСЛАУ                        | 6       | 13-14              | 4   | 0                       | 0                      | Письменное домашнее задание |
| 8.  | Тема 8. Устойчивость приближенной схемы             | 6       | 15-16              | 4   | 0                       | 0                      | Письменное домашнее задание |
| 9.  | Тема 9. Нелинейные приближенные схемы               | 6       | 17                 | 2   | 0                       | 0                      | Письменное домашнее задание |
| 10. | Тема 10. Аппроксимация экстремальных задач          | 6       | 18                 | 2   | 0                       | 0                      | Контрольная работа          |

| N | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля |
|---|-----------------------------------|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---------------------------|
|   |                                   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                           |
|   | Тема . Итоговая<br>форма контроля | 6       |                    | 0   | 0                       | 0                      | Экзамен                   |
|   | Итого                             |         |                    | 36  | 0                       | 0                      |                           |

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Введение в теорию абстрактных схем

#### *лекционное занятие (4 часа(ов)):*

Параметрические семейства задач. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Примеры приближенных схем. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Граничные задачи для дифференциальных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма: метод механических квадратур и метод Галеркина. Экстремальные задачи.

### Тема 2. Операторы и операторные уравнения

#### *лекционное занятие (4 часа(ов)):*

Множества и отображения. Линейные пространства и линейные операторы. Пространства со скалярным произведением. Нормированные пространства. Множество нулей линейного оператора и множество значений. Ограниченные линейные операторы. Норма линейного оператора. Необходимое и достаточное условие существования ограниченного обратного оператора.

### Тема 3. Условия единственности решений

#### *лекционное занятие (4 часа(ов)):*

Аппроксимирующие пространства. Операторы аппроксимации и интерполяции. Невырожденная аппроксимация. Аппроксимирующий оператор. Оценки погрешности элементов. Леммы об априорной оценке погрешностей решений операторных уравнений. Условие существования ограниченного обратного оператора у аппроксимирующего оператора. Условие существования ограниченного обратного оператора у точного оператора.

### Тема 4. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

#### *лекционное занятие (4 часа(ов)):*

Теоремы Фредгольма о разрешимости интегральных уравнений. Приближенное решение уравнения Фредгольма второго рода методом механических квадратур, пространства с кубическими нормами. Вычисление норм операторов аппроксимации и интерполяции. Приближенное решение уравнения Фредгольма второго рода методом Галеркина (методом моментов), сферические нормы.

### Тема 5. Существование решений

#### *лекционное занятие (4 часа(ов)):*

Аппроксимирующее решение операторного уравнения и приближенное решение. Непрерывно обратимые операторы. Леммы о непрерывной обратимости линейных операторов. Условия обратимости справа линейных операторов. Понятие квазирешения операторного уравнения. Невязки точного и аппроксимирующего уравнений. Оценка невязок точного и аппроксимирующего уравнений.

### Тема 6. Сходимость приближенной схемы

#### *лекционное занятие (4 часа(ов)):*

Два определения сходимости последовательности аппроксимирующих решений (S-сходимость и T-сходимость). Сильная сходимость последовательности аппроксимирующих операторов к точному оператору (ST- и TS-сходимость). Две теоремы о сходимости абстрактной приближенной схемы. Проверка условия единственности решений аппроксимирующих уравнений.

## Тема 7. Метод усечения БСЛАУ

### лекционное занятие (4 часа(ов)):

Метод усечения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений: операторы аппроксимации и интерполяции, кубические нормы и сферические нормы. Техника оценок норм. Проверка условий сходимости последовательностей приближенных решений к точному решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Примеры регулярных БСЛАУ.

## Тема 8. Устойчивость приближенной схемы

### лекционное занятие (4 часа(ов)):

Устойчивость последовательности аппроксимирующих операторов. Условия сходимости приближенной схемы, использующие ее устойчивость. Двойственные утверждения о сходимости. Пример: задача Коши для простейшего дифференциального уравнения первого порядка, приближенная схема метода Эйлера. Проверка условия сильной сходимости последовательности аппроксимирующих операторов.

## Тема 9. Нелинейные приближенные схемы

### лекционное занятие (2 часа(ов)):

Достаточные условия сходимости приближенной схемы: условие аппроксимации, условие устойчивости и условие невырожденности норм. Пример: задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения. Метод Галеркина. Равносильность методу усечения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Метод полуобращения операторного уравнения.

## Тема 10. Аппроксимация экстремальных задач

### лекционное занятие (2 часа(ов)):

Двойственные пространства и двойственные операторы. Аппроксимация двойственных пространств и двойственных операторов. Аппроксимационные диаграммы. Бесконечномерное линейное программирование. Пример: задача о распределении нагрузки вдоль упругой струны. Аппроксимация общей экстремальной задачи. Сходимость минимизирующей последовательности.

## 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

| N  | Раздел Дисциплины                                   | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|----|---|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 3. | Тема 3. Условия единственности решений              | 6       | 5-6             | подготовка к контрольной работе       | 2                      | контрольная работа                    |
| 4. | Тема 4. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода | 6       | 7-8             | подготовка домашнего задания          | 2                      | домашнее задание                      |
| 5. | Тема 5. Существование решений                       | 6       | 9-10            | подготовка домашнего задания          | 2                      | домашнее задание                      |
| 6. | Тема 6. Сходимость приближенной схемы               | 6       | 11-12           | подготовка к контрольной точке        | 2                      | контрольная точка                     |
| 7. | Тема 7. Метод усечения БСЛАУ                        | 6       | 13-14           | подготовка домашнего задания          | 2                      | Письменное домашнее задание           |
| 8. | Тема 8. Устойчивость приближенной схемы             | 6       | 15-16           | подготовка домашнего задания          | 2                      | Письменное домашнее задание           |

| N   | Раздел Дисциплины                          | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|--|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 9.  | Тема 9. Нелинейные приближенные схемы      | 6       | 17              | подготовка домашнего задания          | 3                      | Письменное домашнее задание           |
| 10. | Тема 10. Аппроксимация экстремальных задач | 6       | 18              | подготовка к контрольной работе       | 3                      | Контрольная работа                    |
|     | Итого                                      |         |                 |                                       | 18                     |                                       |

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Активные и интерактивные формы проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Введение в теорию абстрактных схем

### Тема 2. Операторы и операторные уравнения

### Тема 3. Условия единственности решений

контрольная работа , примерные вопросы:

Проверка знаний по темам: Обратимость слева аппроксимирующего оператора. Обратимость слева точного оператора

### Тема 4. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение литературы, выполнение упражнений по темам: Метод механических квадратур. Метод моментов (метод Галеркина). Распределения (обобщенные функции). Преобразование Фурье: S'-теория

### Тема 5. Существование решений

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение литературы, выполнение упражнений по темам: Квазирешения. Условия обратимости справа линейных операторов. Оценка невязок точного и аппроксимирующего уравнений

### Тема 6. Сходимость приближенной схемы

контрольная точка , примерные вопросы:

Проверка знаний по теме: S-сходимость и T-сходимость последовательности аппроксимирующих решений к точному решению

### Тема 7. Метод усечения БСЛАУ

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Проверка знаний по темам: БСЛАУ Метод усечения

### Тема 8. Устойчивость приближенной схемы

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Проверка знаний по теме: Устойчивость приближенной схемы

### Тема 9. Нелинейные приближенные схемы

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Проверка знаний по теме: Нелинейные приближенные схемы

### Тема 10. Аппроксимация экстремальных задач

Контрольная работа , примерные вопросы:

Проверка знаний по темам: Аппроксимация и интерполяция  
Априорные оценки погрешности  
Метод моментов (метод Галеркина) Оценка невязок точного и аппроксимирующего уравнений

### **Итоговая форма контроля**

экзамен (в 6 семестре)

Примерные вопросы к экзамену:

Вопросы для экзамена:

1. Понятие абстрактных схем
2. Операторы
3. Операторные уравнения
4. Условия единственности решений
5. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода
6. Существование решений
7. Сходимость приближенной схемы
8. БСЛАУ
9. Метод усечения
10. Устойчивость приближенной схемы
11. Нелинейные приближенные схемы
12. Аппроксимация экстремальных задач
13. Аппроксимация и интерполяция
14. Априорные оценки погрешности
15. Метод моментов (метод Галеркина)
16. Оценка невязок точного и аппроксимирующего уравнений

### **7.1. Основная литература:**

1. Плещинский Н.Б. Прикладной функциональный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.Б. Плещинский. - Электрон. дан. - Казань: Казан. ун-т, 2018 - 80 с. - Режим доступа: [https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F\\_297754050/afa18a.pdf](https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F_297754050/afa18a.pdf), свободный.
2. Осиленкер, Б.П. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс] : учебно-практическое пособие / Б.П. Осиленкер. - М. : МИСИ-Московский государственный строительный университет, 2017. - 133 с. - ISBN 978-5-7264-1650-2. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/1018552>
3. Пирковский, А.Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Ю. Пирковский. ? Электрон. дан. ? Москва : МЦНМО, 2010. ? 176 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9384>

### **7.2. Дополнительная литература:**

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. ? Электрон. дан. ? Москва : Физматлит, 2009. ? 572 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2206>
2. Треногин, В.А. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : учебник / В.А. Треногин. ? Электрон. дан. ? Москва : Физматлит, 2007. ? 488 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59471>

3. Филимоненкова, Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.В. Филимоненкова. ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2015. ? 176 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/64343>

### **7.3. Интернет-ресурсы:**

[www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf) - [www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf)  
[www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf) - [www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf)  
[www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf) - [www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf)  
[www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf) - [www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf)  
[www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf) - [www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf](http://www.abcpnb.ru/RUS/Resour/AbsShe/z.pdf)

### **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Абстрактные приближенные схемы" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Плещинский Н.Б. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Бахтиева Л.У. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.