

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

**Программа дисциплины**  
Математическая логика и теория алгоритмов Б2.Б.5

Направление подготовки: 010300.62 - Фундаментальная информатика и информационные технологии

Профиль подготовки: Системный анализ и информационные технологии

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Ишмухаметов Ш.Т.

**Рецензент(ы):**

Латыпов Р.Х.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Латыпов Р. Х.

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_ 201\_\_\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК № \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_ 201\_\_\_\_ г

Регистрационный № 929114

Казань  
2014

## **Содержание**

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (доцент) Ишмухаметов Ш.Т. кафедра системного анализа и информационных технологий отделение фундаментальной информатики и информационных технологий , Shamil.Ishmukhametov@kpfu.ru

## 1. Цели освоения дисциплины

В курсе даются основные понятия и результаты математической логики. Изучается формальная система классической логики 1 порядка и исследуются вопросы полноты и непротиворечивости. Приводятся основные результаты математической логики - теорема Гёделя, теорема Эрбрана, теорема Лёвенгейма - Скулема. Даётся понятие о неклассических логиках, о логических системах с равенством.

Приводятся примеры приложений формальной логики в информатике, в частности, для построения систем искусственного интеллекта.

## 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б2.Б.5 Общепрофессиональный" основной образовательной программы 010300.62 Фундаментальная информатика и информационные технологии и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 2 курсе, 4 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 2 курсе во 2 семестре для студентов обучающихся по направлению "Фундаментальная информатика и информационные технологии".

Изучение основывается на результатах изучения дисциплины "Дискретная математика".

Результаты подготовки по дисциплине "Математическая логика и теория алгоритмов" используются при изучении курсов "Языки программирования", "Логическое программирование".

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции                       | Расшифровка приобретаемой компетенции  |
|--|--|
| ПК-4<br>(профессиональные компетенции) | способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат, фундаментальные концепции и системные методологии, международные и профессиональные стандарты в области информационных технологий, способность использовать современные инструментальные и вычислительные средства (в соответствии с профилизацией) |
| ПК-7<br>(профессиональные компетенции) | способность применять на практике международные и профессиональные стандарты информационных технологий, современные парадигмы и методологии, инструментальные и вычислительные средства (в соответствии с профилем подготовки)   |
| ПК-9<br>(профессиональные компетенции) | способность осуществлять на практике современные методологии управления жизненным циклом и качеством систем, программных средства и сервисов информационных технологий   |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

- роль математической логики в основаниях математики

2. должен уметь:

- ориентироваться в основных результатах математической логики

3. должен владеть:

- теоретическими знаниями о формальных системах 1 порядка

4. должен демонстрировать способность и готовность:

- строить формальные доказательства и выводы в исчислении предикатов

#### **4. Структура и содержание дисциплины/ модуля**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных(ые) единиц(ы) 180 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 4 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### **4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю**

##### **Тематический план дисциплины/модуля**

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля |
|----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---------------------------|
|    |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                           |
| 1. | Тема 1. Исчисление высказываний.<br>Аксиоматическая система ИВ.<br>Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний.  | 4       |                    | 6   | 0                       | 6                      | домашнее<br>задание       |
| 2. | Тема 2. Исчисление предикатов. Формулы.<br>Интерпретации.<br>Общезначимость.<br>Теория доказательств.<br>Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость. | 4       |                    | 6   | 0                       | 6                      | контрольная<br>работа     |

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля |
|----|--|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|---------------------------|
|    |  |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                           |
| 3. | Тема 3. Исчисление с равенством. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Неклассические логики.                           | 4       |                    | 6   | 0                       | 6                      | домашнее задание          |
| 4. | Тема 4. Проблемы разрешимости. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема. | 4       |                    | 6   | 0                       | 6                      | домашнее задание          |
| 5. | Тема 5. Введение в теорию алгоритмов. Тезис Черча. Рекурсивные функции и предикаты. Неразрешимые проблемы.                             | 4       |                    | 6   | 0                       | 6                      | домашнее задание          |
| 6. | Тема 6. Тьюринговая сводимость. Проблема Поста. Креативные и продуктивные множества.   | 4       |                    | 6   | 0                       | 6                      | контрольная работа        |
|    | Тема . Итоговая форма контроля   | 4       |                    | 0   | 0                       | 0                      | экзамен                   |
|    | Итого  |         |                    | 36  | 0                       | 36                     |                           |

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Исчисление высказываний. Аксиоматическая система ИВ. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Высказывания. Логические операции. Формулы. Таблицы истинности. Общезначимые формулы. Логическое следование. Нормальные формы. Аксиоматическая система исчисления высказываний. Доказуемость и выводимость. Теорема о дедукции. Правила введения и удаления логических связок. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний. Анализ рассуждений на естественном языке.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Выполнение логического вывода в исчислении высказываний. Проверка истинности пропозициональных форм.

**Тема 2. Исчисление предикатов. Формулы. Интерпретации. Общезначимость. Теория доказательств. Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Логика предикатов Кванторы. Свободные и связанные переменные. Формулы. Интерпретации. Общезначимость. Логическое следование. Теория доказательств. Аксиомы и правила вывода. Теорема дедукции в исчислении предикатов. Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость. Теорема Эрбрана.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Построение логического вывода в исчислении предикатов. Решение задач на доказательство выводимости тех или иных секвенций.

**Тема 3. Исчисление с равенством. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Неклассические логики.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Построение исчисления предикатов с равенством. Функции, термы. Аксиомы равенства. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Введение в неклассические логики. Интуиционистская логика, особенности ее построения и использования.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Исчисление с равенством. Функции, термы. Аксиомы равенства. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Неклассические логики.

**Тема 4. Проблемы разрешимости. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Проблемы разрешимости Разрешимость сингулярного исчисления. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Проблемы разрешимости Разрешимость сингулярного исчисления. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема.

**Тема 5. Введение в теорию алгоритмов. Тезис Черча. Рекурсивные функции и предикаты. Неразрешимые проблемы.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Неформальное понятие алгоритма. Машины Тьюринга. Рекурсивные функции. Теорема о совпадении класса рекурсивных функций и функций, вычислимых на машинах Тьюринга. Неразрешимые проблемы. Неразрешимость проблемы остановки.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Классификация неразрешимых проблем. Теорема Геделя о неполноте.

**Тема 6. Тьюринговая сводимость. Проблема Поста. Креативные и продуктивные множества.**

**лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Сильные и слабые сводимости. Креативные и  $\mu$ -полные множества. Существование  $\mu$ -полного множества. Продуктивные множества. Простые множества Поста.

**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Изучение алгоритмов построения неразрешимых множеств.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

| N  | Раздел<br>Дисциплины   | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды<br>самостоятельной<br>работы<br>студентов | Трудоемкость<br>(в часах) | Формы контроля<br>самостоятельной<br>работы |
|----|--|---------|--------------------|--|---------------------------|---|
| 1. | Тема 1. Исчисление высказываний.<br>Аксиоматическая система ИВ.<br>Непротиворечивость и полнота исчисления |         |                    |  |                           |   |

высказываний.

4

подготовка  
домашнего  
задания

6

домашнее  
задание

| N     | Раздел<br>Дисциплины  | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды<br>самостоятельной<br>работы<br>студентов | Трудоемкость<br>(в часах) | Формы контроля<br>самостоятельной<br>работы |
|-------|---|---------|--------------------|--|---------------------------|---|
| 2.    | Тема 2. Исчисление предикатов. Формулы. Интерпретации. Общезначимость. Теория доказательств. Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость. | 4       |                    | подготовка домашнего задания                   | 6                         | домашнее задание                            |
| 3.    | Тема 3. Исчисление с равенством. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Неклассические логики.  | 4       |                    | подготовка домашнего задания                   | 6                         | домашнее задание                            |
| 4.    | Тема 4. Проблемы разрешимости. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема.                    | 4       |                    | подготовка домашнего задания                   | 6                         | домашнее задание                            |
| 5.    | Тема 5. Введение в теорию алгоритмов. Тезис Черча. Рекурсивные функции и предикаты. Неразрешимые проблемы.  | 4       |                    | подготовка домашнего задания                   | 6                         | домашнее задание                            |
| 6.    | Тема 6. Тьюринговая сводимость. Проблема Поста. Креативные и продуктивные множества.  | 4       |                    | подготовка к контрольной работе                | 6                         | контрольная работа                          |
| Итого |   |         |                    |  | 36                        |   |

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лекционных и лабораторных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов математической логики на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Исчисление высказываний. Аксиоматическая система ИВ. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

### **Тема 2. Исчисление предикатов. Формулы. Интерпретации. Общезначимость. Теория доказательств. Предварённая нормальная форма. Полнота и непротиворечивость.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

### **Тема 3. Исчисление с равенством. Формальные доказательства в исчислении с равенством. Неклассические логики.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

### **Тема 4. Проблемы разрешимости. Разрешимость теории равенства. Неразрешимость узкого исчисления предикатов. Теорема Лёвенгейма-Скулема.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

### **Тема 5. Введение в теорию алгоритмов. Тезис Черча. Рекурсивные функции и предикаты. Неразрешимые проблемы.**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение задач по изучаемой теме

### **Тема 6. Тьюринговая сводимость. Проблема Поста. Креативные и продуктивные множества.**

контрольная работа , примерные вопросы:

Выполнение контрольной работы по теме "Тьюринговая сводимость"

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

По данной дисциплине предусмотрено проведение экзамена. Примерные вопросы для экзамена - Приложение1.

Для текущего контроля успеваемости предусмотрено проведение тестов. Примерные тестовые вопросы - Приложение2.

Примерный список вопросов к экзамену.

1. Предмет математической логики. Логические антиномии.
2. Понятие о формальных системах. Примеры формальных систем.
3. Высказывания. Значения истинности. Элементарные и составные высказывания.
4. Основные логические операции и их свойства.
5. Формулы логики высказываний. Таблицы истинности.
6. Эквивалентные формулы, основные эквивалентности.
7. Общезначимые формулы. Основные общезначимости.
8. Теорема о подстановке.
9. Теорема об эквивалентной замене.
10. Принцип двойственности.
11. Исчисление высказываний. Аксиомы, правило *modus ponens*.
12. Формальные доказательства. Примеры.
13. Формальные выводы из допущений. Примеры.
14. Правила введения и удаления логических связок.
15. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний.
16. Логика предикатов. Кванторы. Формулы логики предикатов.
17. Интерпретации формул. Общезначимые, выполнимые формулы.
18. Основные эквивалентности логики предикатов.
19. Предварённая нормальная форма.
20. Исчисление предикатов. Аксиомы, правила вывода. Формальные доказательства.
21. Формальные выводы в исчислении предикатов.
22. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов.
23. Понятие о теореме Гёделя. Неполнота формальной арифметики.
24. Понятие о теореме Лёвенгейма-Скулема.
25. Понятие о теореме Эрбрана.
26. Понятие о неклассических логиках.
27. Логическое программирование.
28. Исчисление предикатов с равенством.

Примерные варианты контрольной работы

Контрольная работа 1.

Доказать выводимость в ИВ следующих формул:

1.  $A \rightarrow B$  влечет  $\neg B \rightarrow \neg A$
2.  $A \& B \rightarrow A, B$
3.  $\neg(A \& B) \rightarrow \neg A \text{ или } \neg B$

Контрольная работа 2

Доказать в исчислении предикатов следующих секвенций:

1. Правило введения квантора всеобщности.
2. Правило удаления квантора существования.
3. Привести формулу к пренексной нормальной форме.

## 7.1. Основная литература:

1. Клини, Стивен Коул. Математическая логика / С. К. Клини; пер. с англ. Ю. А. Гастева; под ред. Г. Е. Минца; предисл. Ю. А. Гастева и Г. Е. Минца.?Изд. 4-е.?Москва: URSS: ЛКИ, 2008.?480 с
2. Поздняков, С. Н. Дискретная математика: учебник для студ. вузов / С. Н. Поздняков, С. В. Рыбин.?Москва: Академия, 2008.?448 с
3. Успенский, В. А. Вводный курс математической логики: [учеб. пособие] / В.А.Успенский, Н.К.Верещагин, В.Е.Плиско.? [2-е изд.].?Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.?125с.
4. Громкович, Ю. Теоретическая информатика: Введение в теорию автоматов, теорию вычислимости, теорию сложности, теорию алгоритмов, рандомизацию, теорию связи и криптографию / Юрай Громкович; Пер. с нем.; Под ред. Б. Ф. Мельникова.?Издание 3-е.?Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2010.?336 с
5. Математическая логика: Учебное пособие / В.И. Игошин. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 399 с. URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=242738>
6. Введение в логику: Учебник / В.А. Бочаров, В.И. Маркин. - 2-е изд., доп. и испр. - М.: ИД ФОРУМ: ИНФРА-М, 2011. - 560 с. URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=264965>
7. Методы научного познания: Учебное пособие / С.А. Лебедев. - М.: Альфа-М: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 272 с. URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=450183>

## 7.2. Дополнительная литература:

Математическая логика, Шапорев, Сергей Дмитриевич, 2007г.

Математическая логика и теория алгоритмов для программистов, Гринченков, Дмитрий Валерьевич; Потоцкий, Сергей Иванович, 2010г.

Математическая логика, Колмогоров, Андрей Николаевич; Драгалин, Альберт Григорьевич, 2004г.

## 7.3. Интернет-ресурсы:

Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>

образовательный математический сайт - <http://www.exponenta.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал образовательных математических ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Сайт с учебными материалами по математике - <http://mathhelp.spb.ru>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Математическая логика и теория алгоритмов" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010300.62 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" и профилю подготовки Системный анализ и информационные технологии .

Автор(ы):

Ишмухаметов Ш.Т. \_\_\_\_\_  
"\_\_\_" 201 \_\_\_ г.

Рецензент(ы):

Латыпов Р.Х. \_\_\_\_\_  
"\_\_\_" 201 \_\_\_ г.