

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ
проф. Таюрский Д.А.

"__" _____ 20__ г.

Программа дисциплины

Изопериметрические неравенства

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2017

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
 - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
 - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Салахудинов Р.Г. (Кафедра математического анализа, отделение математики), Rustem.Salahudinov@kpfu.ru

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-6	способностью к собственному видению прикладного аспекта в строгих математических формулировках
ПК-9	способностью различным образом представлять и адаптировать математические знания с учетом уровня аудитории

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен демонстрировать способность и готовность:

Обучающийся должен демонстрировать способность:

1. Определить основные геометрические и физические величины, зависящие от формы и размера тела или области на плоскости.
2. Сформулировать классические изопериметрические неравенства на плоскости и в пространстве.
3. Привести не менее двух доказательств классического изопериметрического неравенства на плоскости.
4. Определить различные типы симметризации плоской области. Строить простейшие примеры.
5. Сформулировать свойства функционалов при симметризации.
6. Сформулировать изометрические свойства конформного момента инерции области.
7. Обосновать изопериметрические свойства конформного момента.
8. Изложить изометрические свойства жесткости кручения области.
9. Обосновать двумя способами изометрические свойства жесткости кручения области.
10. Представление площади, жесткости кручения, конформного момента, супремума функции напряжения через коэффициенты отображающей функции.

Обучающийся должен демонстрировать готовность:

1. Построения приближенных формул при симметризации.
2. Строить контрпримеры к обратному классическому изопериметрическому неравенству на плоскости.
3. Вычислять функционалы области для простейших областей.
4. Строить гипотезы (неравенства, утверждения) на основании собственных вычислений.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.9 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Анализ на многообразиях)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 2 курсе в 3 семестре.

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) на 144 часа(ов).

Контактная работа - 56 часа(ов), в том числе лекции - 28 часа(ов), практические занятия - 28 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 52 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 3 семестре.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Основные обозначения и определения. Простейшие изопериметрические неравенства.	3	2	2	0	6
2.	Тема 2. Изопериметрические неравенства и двусторонние оценки. Представление конформного момента инерции через коэффициенты отображающей функции.	3	2	2	0	6
3.	Тема 3. Два изопериметрических неравенства для конформного момента инерции.	3	2	2	0	4
4.	Тема 4. Простейшие примеры вычисления функционалов. Другие примеры вычисления функционалов.	3	3	3	0	2
5.	Тема 5. Конформные моменты порядка α . Конструирование гипотез. Конформный момент 4-го порядка.	3	2	2	0	6
6.	Тема 6. Примеры вычисления конформных моментов порядка α .	3	2	2	0	4
7.	Тема 7. Пространство Бергмана аналитических функций. Теорема о норме Бергмана произведения аналитических функций и её следствия. Изопериметрические цепочки неравенств	3	2	2	0	2
8.	Тема 8. Неравенство Сен-Венана -- Полюа. Доказательство Давенпорта.	3	2	2	0	4
9.	Тема 9. Изопериметрическое неравенство между жесткостью кручения и конформным моментом инерции.	3	2	2	0	2
10.	Тема 10. Формула Давенпорта для областей с неограниченной площадью.	3	2	2	0	2
11.	Тема 11. Еще одно оригинальное доказательство неравенства Сен-Венана --- Полюа и следствия из него.	3	2	2	0	2
12.	Тема 12. Доказательство одного неравенства Пейна.	3	2	2	0	6
13.	Тема 13. Примеры вычисления жесткости кручения односвязной области.	3	3	3	0	6
	Итого		28	28	0	52

4.2 Содержание дисциплины (модуля)

Тема 1. Основные обозначения и определения. Простейшие изопериметрические неравенства.

Определение площади области, длины границы, радиус наибольшего круга, содержащегося в области, конформного радиуса и его супремума, классической функции напряжения и её супремума, жесткости кручения, основной частотой колебания мембраны, натянутой на область. Основное двухстороннее неравенство между функцией расстояния до границы и конформным радиусом. Теорема Кёбе об $1/4$. Вычисление функционалов для круга. Классическое изопериметрическое неравенство на плоскости и его доказательства.

Тема 2. Изопериметрические неравенства и двусторонние оценки. Представление конформного момента инерции через коэффициенты отображающей функции.

Физические функционалы, определяемые посредством решений краевой задачи, являются трудно вычислимыми величинами, за исключением некоторых простых случаев. Поэтому актуальным является изучение их свойств, в частности, получение оценок для них через более простые характеристики области. Основы этой тематики были заложены в работах лорда Рэлея, В. Сен-Венана и А. Пуанкаре, с одной стороны, и Г. Фабера и Е. Крана, Г. Полиа и Г. Сегё, с другой. Постановка задачи об двухсторонней оценке и аппроксимационные формулы. Результаты Е. Макай., В. Неймана, Ф. Авхадиева. Определение конформного и Евклидова момента инерции области. Вывод формулы представления конформного момента инерции через коэффициенты отображающей функции.

Тема 3. Два изопериметрических неравенства для конформного момента инерции.

Вспомогательная лемма. Представление конформного момента инерции через коэффициенты отображающей функции. Первая изопериметрическая теорема для конформного момента инерции области. Представление площади через коэффициенты отображающей функции. Вторая изопериметрическая теорема для конформного момента инерции. Случаи равенства и следствия.

Тема 4. Простейшие примеры вычисления функционалов. Другие примеры вычисления функционалов.

Примеры вычисления функционалов и применения первой и второй теорем для следующих областей: круг, равносторонний треугольник, полукруг, полуполоса, полоса, прямоугольника, квадрата, область, ограниченная веткой гиперболы и координатными осями, а также область ограниченная правильными n -угольниками.

Тема 5. Конформные моменты порядка α . Конструирование гипотез. Конформный момент 4-го порядка.

Определение конформных моментов области более высокого порядка. Вычисление функционала для круга. Построение гипотез. Доказательство аналога первой теоремы для конформных моментов области более высокого порядка. Аналог второй теоремы для конформного момента 4-го порядка. Формулировка изопериметрических гипотез.

Тема 6. Примеры вычисления конформных моментов порядка α .

Пример вычисления конформных моментов области произвольного порядка для правильного n -угольника и области, ограниченной гиперболой и координатными осями. Построение конформных отображений, нормировка отображений. Вычисление интегралов с помощью пакета "Математика". Получить некоторые предыдущие результаты как частный случай.

Тема 7. Пространство Бергмана аналитических функций. Теорема о норме Бергмана произведения аналитических функций и её следствия. Изопериметрические цепочки неравенств

Определение пространства Бергмана аналитических в односвязной области функций. Вспомогательная лемма. Теорема о норме Бергмана произведения аналитических функций. Следствия из теоремы. Дискретные цепочки изопериметрических неравенств. Доказательство теоремы о произведении. Конструирование гипотез. Доказательство одного следствия из гипотезы о монотонности.

Тема 8. Неравенство Сен-Венана -- Полиа. Доказательство Давенпорта.

Неравенство Сен-Венана -- Полиа. Понятие симметризации и доказательство Полиа. Доказательство формулы Давенпорта для жесткости кручения. Доказательство Давенпорта неравенство Сен-Венана -- Полиа. Случаи равенства. Применение формулы Давенпорта на примере круга. Современный взгляд на неравенство Сен-Венана -- Полиа.

Тема 9. Изопериметрическое неравенство между жесткостью кручения и конформным моментом инерции.

Таблица значений функционалов и формирование гипотез. Теорема о точном изопериметрическом неравенстве между жесткостью кручения и конформным моментом инерции. Доказательство теоремы, применяя критерий Сильвестра положительной определенности. Случаи равенства для класса областей с ограниченной площадью.

Тема 10. Формула Давенпорта для областей с неограниченной площадью.

Конформное отображение и ряд Маклорена. Условие сходимости ряда. Новое представление для жесткости кручения односвязной области. Формула Давенпорта для областей с неограниченной площадью. Предварительные результаты. Смена суммирования в двух кратных рядах. Доказательство неравенства Полиа - Сегё. Случаи равенства.

Тема 11. Еще одно оригинальное доказательство неравенства Сен--Венана --- Полиа и следствия из него.

Новые представления для площади и конформного момента инерции. Новое доказательство неравенства Сен--Венана - Полиа. Новое доказательство основного неравенства между жесткостью кручения и конформным моментом инерции. Неравенство Коши--Буняковского и его применение. Случаи равенства. Условие сходимости изучаемых рядов.

Тема 12. Доказательство одного неравенство Пейна.

Об одном неравенстве Пейна и его доказательстве. Определение множеств уровня функции напряжения и линий уровня функции напряжения. Интеграл по множеству уровня функции. Неулучшаемые оценки определённых интегралов Римана. Анализ доказательства. Обсуждение случаев равенства. Связь неравенства Пейна с другими классическими неравенствами.

Тема 13. Примеры вычисления жесткости кручения односвязной области.

Примеры вычисления функционалов, связанных с классической функцией напряжения для следующих областей: круг, равнобедренный треугольник, полукруг, полуполоса, полоса, прямоугольника, квадрата, область, ограниченная веткой гиперболы и координатными осями, а также область ограниченная правильными n -угольниками.

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Карточка публикации на <http://repository.kpfu.ru/> - <http://libweb.ksu.ru/vufind/Record/RU02eLSL02eEOR02e333>

Учебное пособие в формате pdf - http://kpfu.ru/staff_files/F1383248008/Avhadiev_Tochnye_ocenki.pdf

Учебное пособие в формате pdf -

<http://kpfu.ru/docs/F25706379/%C0%E2%F5%E2%E4%E8%E5%E2%20%D4.%C3..pdf>

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Вести конспект лекций. Лекции ведутся в отдельной общей тетради, рекомендуется оставлять место для заметок, например в виде полей. Знание основного материала предыдущих лекция, включая знание основных определений и ключевых теорем. Рекомендуется выделять в тексте ключевые слова, определения, леммы и теоремы.
практические занятия	Практические занятия ведутся в отдельной тетради. Записи в тетради необходимо разделять по дате и по темам занятий. Рекомендуется использовать черновик для аккуратного ведения записей в основной тетради. Внимательно переписывать примеры, разобранные преподавателем. Рекомендуется знание основных понятий, определений и утверждений по соответствующим лекциям.
самостоятельная работа	Самостоятельная работа ведется в той же тетради, что и практические занятия. Самостоятельная работа - это отдельный блок который выделяется заголовком, например, "Домашние задание". Рекомендуется прорабатывать материал непосредственно после практической занятий. При решение задач и примеров рекомендуется их выполнение по образцу из практического занятия.
экзамен	Подготовка к экзамену ведется на основе курса лекций или рекомендованной литературы. Необходимо знание и понимание всех понятий, определений, утверждений, лемм и теорем. Необходимо умение формулировать теоремы в форме непротиворечивых логических конструкций. Желательной уметь строить и приводить примеры к соответствующим определениям и утверждениям. Необходимо знание доказательства теорем и остальных утверждений.

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Анализ на многообразиях".

Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2017

Основная литература:

1. Салахудинов Р. Г. Введение в теорию изопериметрических неравенств. I Метод конформных отображений в теории изопериметрических неравенств: учебное пособие - 2013 - URL: http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05_33_000342.pdf
2. Авхадиев Ф. Г. Введение в геометрическую теорию функций: [учебное пособие] - Казань: Казанский университет, 2012 - 127с.. (https://kpfu.ru//staff_files/F190155061/Lecture.pdf)
3. Авхадиев Ф. Г. Точные оценки в теории функций: учебно-методическое пособие - 2013 - URL: http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05_39_A5-000408.pdf
4. Свешников А. Г. и др. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов: Издание 6-е, стереотипное - Москва: Физматлит, 2010 - 336с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=48167
5. Шабунин, М.И. Теория функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. - Электрон. дан. - Москва : Издательство 'Лаборатория знаний', 2016. - 303 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/84089>. - Загл. с экрана.

Дополнительная литература:

Ф.Г. Авхадиев Неравенства для интегральных характеристик областей. Учебное пособие. Издательство КГУ, Казань, 2006, 142 с. (<http://kpfu.ru/docs/F25706379/%C0%E2%F5%E2%E4%E8%E5%E2%20%D4.%C3..pdf>)

Приложение 3
к рабочей программе дисциплины (модуля)
Б1.В.ДВ.9 Изопериметрические неравенства

Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2017

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows