

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Д.А. Таюрский  
\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

подписано электронно-цифровой подписью

### Программа дисциплины

Математические модели механики сплошной среды Б1.В.ДВ.17

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Карчевский М.М.

**Рецензент(ы):**

Шагидуллин Р.Р.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 913719

Казань  
2019

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Карчевский М.М. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики, mikhail.Karchevsky@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Излагаются основные понятия, применяемые при построении математических моделей механики сплошной среды. Вводная часть курса содержит необходимые сведения из алгебры и анализа, не включаемые обычно в стандартные университетские курсы.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.17 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 4 курсе, 8 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 4 курсе в 8 семестре для студентов обучающихся по направлению 'Прикладная математика'.

Изучение основывается на результатах изучения дисциплин 'Алгебра и геометрия', 'Математический анализ', 'Уравнения математической физики'.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1 (профессиональные компетенции)	готовностью к самостоятельной работе
ОПК-1 (профессиональные компетенции)	готовностью к самостоятельной работе
ОПК-2 (профессиональные компетенции)	способностью использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования
ОПК-2 (профессиональные компетенции)	способностью использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования
ПК-10 (профессиональные компетенции)	готовностью применять математический аппарат для решения поставленных задач, способностью применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных
ПК-12 (профессиональные компетенции)	способностью самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук
ПК-9 (профессиональные компетенции)	способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

Студенты, завершившие изучение данной дисциплины должны быть знакомыми с разделами теории уравнений математической физики, функционального анализа и численных методов

2. должен уметь:

использовать математические модели механики сплошной среды для решения определенных задач.

3. должен владеть:

методами решения задач механики сплошной среды.

4. должен продемонстрировать способность и готовность:

полученные знания по дисциплине 'Математические модели механики сплошной среды'.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 8 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Вспомогательные сведения из математического анализа и алгебры.	8	1	0	0	4	Письменная работа
2.	Тема 2. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа.	8	2	0	0	4	Реферат
3.	Тема 3. Кинематика сплошной среды. Деформация тела и ее основные характеристики.	8	3	0	0	4	Творческое задание
4.	Тема 4. Динамика сплошной среды. Силы в механике сплошной среды.	8	4	0	0	4	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
5.	Тема 5. Определяющие уравнения сплошной среды. Принцип локальности. Принцип независимости от системы отсчета. Классификация сплошных сред.	8	5,6	0	0	6	Научный доклад
6.	Тема 6. Основные граничные задачи линейной теории упругости. Динамические задачи линейной теории упругости. Теорема о кинетической энергии.	8	6,7	0	0	6	Письменная работа
7.	Тема 7. Вариационные принципы теории упругости. Кинематически допустимое множество перемещений.	8	8	0	0	4	Творческое задание
8.	Тема 8. Математические модели линейно-вязкой жидкости. Интерпретация параметров вязкости.	8	9	0	0	4	Реферат
9.	Тема 9. Уравнения движения идеальной жидкости. Основные законы движения идеальной жидкости.	8	10	0	0	4	Письменная работа
	Тема . Итоговая форма контроля	8		0	0	0	Экзамен
	Итого			0	0	40	

#### 4.2 Содержание дисциплины

##### Тема 1. Вспомогательные сведения из математического анализа и алгебры.

##### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

На занятии студенты знакомятся с такими понятиями, как линейные пространства, базис в линейном пространстве, евклидово пространство, основной и взаимный базисы.

##### Тема 2. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа.

##### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

На занятии студенты знакомятся с такими понятиями, как тензор, тензорное произведение векторов. Рассматриваются различные виды компонент тензора, специальные тензоры (симметричные, положительно определенные, антисимметричные, ортогональные) и их свойства.

**Тема 3. Кинематика сплошной среды. Деформация тела и ее основные характеристики.**  
**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

На занятии обсуждаются следующие вопросы: система отсчета при постановки задач кинематики сплошной среды, деформация тела и ее характеристики, тензор скоростей деформации, плотность массы.

**Тема 4. Динамика сплошной среды. Силы в механике сплошной среды.**  
**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Обсуждаются следующие вопросы: силы в механике сплошной среды, интегральные законы движения (принцип Даламбера), тензор напряжений Коши, дается вывод дифференциального уравнения движения и основных характеристик напряженного состояния.

**Тема 5. Определяющие уравнения сплошной среды. Принцип локальности. Принцип независимости от системы отсчета. Классификация сплошных сред.**  
**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Занятие посвящено построению системы уравнений, описывающих динамику сплошной среды. При этом используются принцип локальности и принцип независимости от системы отсчета. Приводится также классификация сплошных сред, в качестве примера математическая модель для упругого тела.

**Тема 6. Основные граничные задачи линейной теории упругости. Динамические задачи линейной теории упругости. Теорема о кинетической энергии.**  
**лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Продолжается изучение построенной ранее математической модели для упругого тела. Описываются основные краевые задачи линейной теории упругости. Рассматриваются как статические так и динамические задачи. Доказывается теорема о кинетической энергии. Приводится математическая постановка(вывод уравнений и краевых условий) задачи о равновесии полого цилиндра под действием внутреннего давления (задача Ламе).

**Тема 7. Вариационные принципы теории упругости. Кинематически допустимое множество перемещений.**  
**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Аудитории дается постановка задачи теории упругости в виде задачи на минимум функционала на некотором ограниченном множестве. Приводятся принцип Лагранжа и принцип Кастильяно, которые являются основой вариационной постановки. Демонстрируется использование этих принципов в приближенных методах решения задач теории упругости.

**Тема 8. Математические модели линейно-вязкой жидкости. Интерпретация параметров вязкости.**  
**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Обсуждаются математические модели линейно-вязкой жидкости при различных краевых условиях. Дается и обосновывается физическая интерпретация параметров вязкости. Формулируются теоремы единственности решения для системы уравнений Навье - Стокса. Проводится исследование единственности решений для стационарных и нестационарных задач системы уравнений Навье - Стокса. При этом доказывается ряд вспомогательных функциональных неравенства.

**Тема 9. Уравнения движения идеальной жидкости. Основные законы движения идеальной жидкости.**  
**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Дается вывод уравнения движения идеальной жидкости, обосновываются основные законы движения идеальной жидкости. Приводятся постановки основных типов граничных задач. Обсуждаются следующие вопросы: поверхности слабого и сильного разрыва, линии тока, вихревые линии. Приводятся элементарные решения.

### 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Вспомогательные сведения из математического анализа и алгебры.	8	1	подготовка к письменной работе	2	Письменная работа
2.	Тема 2. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа.	8	2	подготовка к реферату	2	Реферат
3.	Тема 3. Кинематика сплошной среды. Деформация тела и ее основные характеристики.	8	3	подготовка к творческому заданию	4	Творческое задание
4.	Тема 4. Динамика сплошной среды. Силы в механике сплошной среды.	8	4	подготовка домашнего задания	4	Письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Определяющие уравнения сплошной среды. Принцип локальности. Принцип независимости от системы отсчета. Классификация сплошных сред.	8	5,6	подготовка к научному докладу	4	Научный доклад
6.	Тема 6. Основные граничные задачи линейной теории упругости. Динамические задачи линейной теории упругости. Теорема о кинетической энергии.	8	6,7	подготовка к письменной работе	4	Письменная работа
7.	Тема 7. Вариационные принципы теории упругости. Кинематически допустимое множество перемещений.	8	8	подготовка к творческому заданию	4	Творческое задание
8.	Тема 8. Математические модели линейно-вязкой жидкости. Интерпретация параметров вязкости.	8	9	подготовка к реферату	4	Реферат

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
9.	Тема 9. Уравнения движения идеальной жидкости. Основные законы движения идеальной жидкости.	8	10	подготовка к письменной работе	4	Письменная работа
	Итого				32	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лабораторных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на занятиях. Причем конспект, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. После занятий полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к зачету. При подготовке к сдаче зачета весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### Тема 1. Вспомогательные сведения из математического анализа и алгебры.

Письменная работа , примерные вопросы:

Доказать теорему Рисса о представлении линейного функционала.

### Тема 2. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа.

Реферат , примерные вопросы:

Тема реферата: "Дифференцирование векторных и тензорных функций вещественного аргумента".

### Тема 3. Кинематика сплошной среды. Деформация тела и ее основные характеристики.

Творческое задание , примерные вопросы:

Обосновать вывод интегрального уравнения баланса массы.

### Тема 4. Динамика сплошной среды. Силы в механике сплошной среды.

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

На самостоятельное изучение выносится следующий вопрос: "Интегральные законы движения (принцип Даламбера)".

### Тема 5. Определяющие уравнения сплошной среды. Принцип локальности. Принцип независимости от системы отсчета. Классификация сплошных сред.

Научный доклад , примерные вопросы:

Математическое описание бесконечно малых деформаций изотропного упругого тела.

### Тема 6. Основные граничные задачи линейной теории упругости. Динамические задачи линейной теории упругости. Теорема о кинетической энергии.

Письменная работа , примерные вопросы:

Получить необходимые условия равновесия для задачи линейной теории упругости.

**Тема 7. Вариационные принципы теории упругости. Кинематически допустимое множество перемещений.**

Творческое задание , примерные вопросы:

Используя принцип Лагранжа и метод Галеркина, построить приближенный метод решения задачи линейной теории упругости.

**Тема 8. Математические модели линейно-вязкой жидкости. Интерпретация параметров вязкости.**

Реферат , примерные вопросы:

Вывод уравнений пограничного слоя в окрестности плоской стенки в вязкой несжимаемой жидкости.

**Тема 9. Уравнения движения идеальной жидкости. Основные законы движения идеальной жидкости.**

Письменная работа , примерные вопросы:

Поверхности слабого и сильного разрыва.

**Итоговая форма контроля**

экзамен (в 8 семестре)

Примерные вопросы к экзамену:

Примерные вопросы к экзамену:

Для текущего контроля успеваемости предусмотрено проведение экзамена. Примерные вопросы на экзамен:

Билет 1.

1. Теорема Рисса о представлении линейного функционала (в конечномерном евклидовом пространстве).
2. Деформация тела и ее характеристики.

Билет 2.

1. Кососимметричные тензоры. Представление в трехмерном пространстве.
2. Пространственное описание движения. Интегральное уравнение баланса массы

Билет 3.

1. Ортогональные тензоры. Представление в трехмерном пространстве
2. Силы в механике сплошной среды. Основные законы движения

Билет 4.

1. Теорема Коши о полярном разложении тензора.
2. Упругое тело.

Билет 5.

1. Изотропные тензорные функции и их основные свойства.
2. Вязкая жидкость. Линейно-вязкая жидкость. Идеальная жидкость.

Билет 6.

1. Дифференцирование векторных и тензорных функций вещественного аргумента.
2. Уравнения Навье-Стокса.

Билет 7.

1. Градиенты.
2. Определяющие соотношения. Принцип локальности. Принцип независимости от системы отсчета.

Билет 8.

1. Формулы Остроградского-Гаусса.
2. Уравнение энергии.

Билет 9.

1. Теорема Рисса о представлении линейного функционала (в конечномерном евклидовом пространстве)
2. Основные характеристики напряженного состояния.

Билет 10

1. Кососимметричные тензоры. Представление в трехмерном пространстве.
2. Тензор напряжений.

Билет 11.

1. Ортогональные тензоры. Представление в трехмерном пространстве.
2. Плотность массы. Уравнение неразрывности.

Билет 12.

1. Основные дифференциальные операции в декартовой системе координат.
2. Деформация тела и ее характеристики.

Билет 13.

1. Теорема Рисса о представлении линейного функционала (в конечномерном евклидовом пространстве)
2. Тензор скоростей деформации.

Билет 14

1. Теорема Коши о полярном разложении тензора.
2. Уравнение энергии.

Билет 15

1. Ортогональные тензоры. Представление в трехмерном пространстве.
2. Вязкая жидкость. Линейно-вязкая жидкость. Идеальная жидкость

Билет 16

1. Изотропные тензорные функции и их основные свойства.
2. Определяющее соотношение упругого тела.

Билет 17.

3. Теорема Рисса о представлении линейного функционала (в конечномерном евклидовом пространстве).
4. Деформация тела и ее характеристики.

Билет 18.

3. Кососимметричные тензоры. Представление в трехмерном пространстве.
4. Пространственное описание движения. Интегральное уравнение баланса массы

Билет 19.

3. Ортогональные тензоры. Представление в трехмерном пространстве
4. Силы в механике сплошной среды. Основные законы движения

Билет 20

3. Теорема Коши о полярном разложении тензора.
4. Упругое тело.

### 7.1. Основная литература:

1. Карчевский, М.М. Математические модели механики сплошной среды: учеб. пособие /М.М. Карчевский, Р.Р. Шагидуллин - Казань: КГУ, 2007. 212 с.
2. Шинкин, В.Н. Механика сплошных сред: Курс лекций [Электронный ресурс] : учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Москва : МИСИ, 2010. ? 235 с. ?  
Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2079>
3. Димитриенко, Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды [Электронный ресурс] : учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Москва : Физматлит, 2009. ? 624 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59577>
4. Андреев, В.К. Математические модели механики сплошных сред [Электронный ресурс] : учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2015. ? 240 с. ?  
Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/67464>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Кучеряев, Б.В. Механика сплошных сред (теоретические основы обработки давлением композитных материалов с задачами и решениями, примерами и упражнениями) [Электронный ресурс]: учеб. ? Электрон. дан. ? Москва: МИСИ, 2006. ? 604 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/1815>
2. Карчевский, М.М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М.М. Карчевский, М.Ф. Павлова. ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2016. ? 276 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72983>
3. Димитриенко, Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды [Электронный ресурс]: учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Москва: Физматлит, 2009. ? 624 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59577>

### 7.3. Интернет-ресурсы:

- Димитриенко, Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды [Электронный ресурс]: учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Москва: Физматлит, 2009. ? 624 с. -  
<https://e.lanbook.com/book/59577>
- Андреев, В.К. Математические модели механики сплошных сред [Электронный ресурс] : учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2015. ? 240 с. -  
<https://e.lanbook.com/book/67464>
- Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>  
Сайт образовательных ресурсов по математике - <http://www.exponenta.ru/>
- Шинкин, В.Н. Механика сплошных сред: Курс лекций [Электронный ресурс] : учеб. пособие ? Электрон. дан. ? Москва : МИСИ, 2010. ? 235 с. - <https://e.lanbook.com/book/2079>

### 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Математические модели механики сплошной среды" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Лекции и практические занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Карчевский М.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Шагидуллин Р.Р. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.