

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по образовательной деятельности КФУ  
проф. Таюрский Д.А.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## **Программа дисциплины**

Вариационные методы в математической физике

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Агачев Ю.Р. (Кафедра теории функций и приближений, отделение математики), Juriy.Agachev@kpfu.ru

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-1	способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу
ОПК-2	способностью создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках
ОПК-3	готовностью самостоятельно создавать прикладные программные средства на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов
ОПК-4	готовностью к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач профессиональной деятельности
ОПК-5	готовностью руководить коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия
ПК-1	способностью к интенсивной научно-исследовательской работе
ПК-10	способностью к преподаванию физико-математических дисциплин и информатики в образовательных организациях основного общего, среднего общего, среднего профессионального и высшего образования
ПК-11	способностью и предрасположенностью к просветительной и воспитательной деятельности, готовность пропагандировать и популяризировать научные достижения
ПК-12	способностью к проведению методических и экспертных работ в области математики
ПК-2	способностью к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом
ПК-3	способностью публично представить собственные новые научные результаты
ПК-4	способностью к применению методов математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач
ПК-7	способностью к применению методов математического и алгоритмического моделирования при анализе экономических и социальных процессов, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики
ПК-8	способностью формулировать в проблемно-задачной форме не математические типы знания (в том числе гуманитарные)
ПК-9	способностью различным образом представлять и адаптировать математические знания с учетом уровня аудитории

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

теоретические основы, лежащие в основе построения вариационных методов

Должен уметь:

строить вычислительные схемы вариационного метода решения ряда классов задач математической физики

Должен владеть:

методами и технологиями обоснования вариационного метода

Должен демонстрировать способность и готовность:

к решению различных задач математической физики, к которым могут быть применены вариационные методы

## 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.2 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.04.01 "Математика (Анализ на многообразиях)" и относится к дисциплинам по выбору.

Осваивается на 1 курсе в 1 семестре.

## 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) на 108 часа(ов).

Контактная работа - 42 часа(ов), в том числе лекции - 14 часа(ов), практические занятия - 28 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 66 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 0 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: зачет в 1 семестре.

## 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Гильбертово пространство. Положительные и положительно-определенные операторы в гильбертовом пространстве	1	2	3	0	6
2.	Тема 2. Энергетическое пространство	1	2	4	0	8
3.	Тема 3. Вариационный метод. Основы теории	1	2	3	0	12
4.	Тема 4. Вариационные методы Ритца, Куранта, Канторовича	1	2	4	0	10
5.	Тема 5. Приложения вариационных методов к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений	1	2	6	0	10
6.	Тема 6. Приложения вариационных методов к задачам для дифференциальных уравнений в частных производных	1	2	6	0	12
7.	Тема 7. Вариационные методы в проблеме собственных значений	1	2	2	0	8
	Итого		14	28	0	66

### 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

#### Тема 1. Гильбертово пространство. Положительные и положительно-определенные операторы в гильбертовом пространстве

Гильбертово пространство. Положительные и положительно-определенные операторы в гильбертовом пространстве и их свойства. Примеры дифференциальных операторов

## **Тема 2. Энергетическое пространство**

Энергетическое пространство положительно-определенного и положительного операторов. Сепарабельность энергетического пространства. Главные и естественные краевые условия

## **Тема 3. Вариационный метод. Основы теории**

Вариационный метод для положительно определенных операторов. Функционал энергии. Задача о минимуме функционала энергии. Построение минимизирующей последовательности. Энергетический метод для положительных операторов. Решение с конечной энергией.

## **Тема 4. Вариационные методы Ритца, Куранта, Канторовича**

Вариационные методы Ритца, Куранта и Канторовича решения краевых задач математической физики

## **Тема 5. Приложения вариационных методов к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений**

Приложения вариационных методов к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений

## **Тема 6. Приложения вариационных методов к задачам для дифференциальных уравнений в частных производных**

Приложения вариационных методов к задачам для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа

## **Тема 7. Вариационные методы в проблеме собственных значений**

Вариационные методы в проблеме собственных значений. Построение минимизирующей последовательности. Приложения к задачам механики

## **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС З++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

### **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Федеральный портал Российское образование - <http://window.edu.ru/>

ЭБС "Znanium.com" - <http://znanium.com/>

ЭБС "Лань" - <https://e.lanbook.com>

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

При изучении курса особое внимание обращать на следующие моменты:

- 1) выбор гильбертова пространства, обеспечивающего положительную определенность оператора задачи;
- 2) исследование краевых условий с точки зрения построения энергетического пространства;
- 3) выбор системы координатных функций и вариационного метода для решения исходной краевой задачи.

При подготовке к устному опросу обратить внимание:

1. на весовые пространства квадратично-суммируемых функций и выбор подходящего веса;
2. на краевые условия и дифференциальный оператор задачи;
3. на методику доказательства положительности, положительной определенности оператора;
4. на выделение главных и естественных краевых условий;
5. на построение энергетического пространства положительно определенного оператора;
6. на построение энергетического пространства положительного оператора;
7. на установление сепарабельности энергетического пространства;
8. на построение функционала энергии и соответствующей ему задачи о минимуме;
9. на применение конкретного вариационного метода решения экстремальной задачи;
10. на особенности применения вариационных методов в задачах на собственные значения.

При подготовке к тестированию обратить внимание:

1. на возможность применения методов Ритца, Куранта и Канторовича;
2. на построение вычислительной схемы указанных методов.

При подготовке к творческому заданию особо обратить внимание на краевые условия задачи при построении и исследовании энергетического пространства.

При подготовке к зачету следует обратить внимание на следующие моменты:

1. В зависимости от решаемой задачи выбор гильбертова пространства.
2. Установление положительности и положительной определенности дифференциального оператора задачи.
3. Выявление главных и естественных краевых условий.
4. Построение энергетического пространства положительного и положительно определенного оператора.
5. Построение функционала энергии и задачи о минимуме этого функционала.
6. Применение вариационного метода для положительно определенных операторов.

7. Применение вариационных методов в задачах о собственных значениях.
8. Применение вариационных методов Ритца, Куранта и Канторовича решения конкретных задач механики.
9. Существование минимизирующей последовательности и ее построение.
10. Доказательство сходимости минимизирующей последовательности.

При работе с литературой в первую очередь заняться изучением следующих тем:

1. Положительные и положительно определенные дифференциальные операторы.
2. Энергетическое пространство дифференциального оператора.
3. Задача о минимуме функционала энергии.
4. Вариационные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.
5. Вариационные методы решения задач на собственные значения.

#### **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

#### **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Компьютерный класс.

#### **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;

- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе "Анализ на многообразиях".



Приложение 2  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.2 Вариационные методы в математической физике

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

**Основная литература:**

1. Аттетков А. В. Методы оптимизации: Учебное пособие / А.В. Аттетков, В.С. Зарубин, А.Н. Канатников. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 270 с. - (Высшее образование: Бакалавриат)  
ISBN 978-5-369-01037-2 (<http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=350985>)
2. Фонарёв А. А. Проекционные итерационные методы решения уравнений и вариационных неравенств с нелинейными операторами теории монотонных операторов: Монография / А.А. Фонарёв - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 202 с.- (Научная мысль; Математика) ISBN 978-5-16-010041-8  
(<http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=445170>)

**Дополнительная литература:**

1. Измайлов А.Ф. Численные методы оптимизации : учебное пособие / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов . - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005 . - 304 с.
2. Гулд С.Х. Вариационные методы в задачах о собственных значениях / С.Х. Гулд. - М.: Мир, 1970. - 328 с.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. - М.: Наука, 1970. - 512 с.
4. Пантелеев А. В. Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие с мультимедиа сопровождением [Электронный ресурс]  
/ А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - М.: Логос, 2011. - 424 с. - (Новая университетская библиотека) ISBN 978-5-98704-540-4  
(<http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=469213>)
5. Ректорикс К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорикс. - М.: Мир, 1985. - 589 с.

Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.2 Вариационные методы в математической физике

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Анализ на многообразиях

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, учебно-методические комплексы, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) нового поколения.