

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

### Программа дисциплины

Вариационное исчисление и оптимальное управление Б1.В.ДВ.17

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Плещинский Н.Б.

**Рецензент(ы):**

Бахтиева Л.У.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Плещинский Н. Б.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No 939617

Казань  
2017

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, д.н. (профессор) Плещинский Н.Б. Кафедра прикладной математики отделение прикладной математики и информатики , Nikolai.Pleshchinskii@kpfu.ru

### 1. Цели освоения дисциплины

Изучаются основные принципы постановки и исследования экстремальных задач математического моделирования и математической физики, а также методы решения типовых задач вариационного исчисления и оптимального управления

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ДВ.17 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 4 курсе, 8 семестр.

Изучение дисциплины основано на знаниях, полученных при освоении общепрофессиональных и профессиональных дисциплин по профилю "Математическое моделирование" (бакалавр)

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции                        | Расшифровка приобретаемой компетенции  |
|---|--|
| ОК-6<br>(общекультурные компетенции)    | способность совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень, добиваться нравственного и физического совершенствования своей личности                             |
| ОК-7<br>(общекультурные компетенции)    | способность и готовность к активному общению в научной, производственной и социально-общественной сферах деятельности  |
| ОК-8<br>(общекультурные компетенции)    | способность свободно пользоваться русским и иностранным языками как средством делового общения; способность к активной социальной мобильности  |
| ОК-9<br>(общекультурные компетенции)    | способность использовать углубленные знания правовых и этических норм при оценке последствий своей профессиональной деятельности, при разработке и осуществлении социально значимых проектов |
| ПК-8<br>(профессиональные компетенции)  | способность проводить семинарские и практические занятия с обучающимися, а также лекционные занятия спецкурсов по профилю специализации  |
| ПК-10<br>(профессиональные компетенции) | способность разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий по профильной направленности ООП магистратуры                             |
| ПК-11<br>(профессиональные компетенции) | способность работать в международных проектах по тематике специализации  |
| ПК-9<br>(профессиональные компетенции)  | способность разрабатывать учебно-методические комплексы для электронного и мобильного обучения   |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

- обладать теоретическими знаниями в области исследования свойств и разработки методов решения экстремальных задач

2. должен уметь:

- ориентироваться в современных методах решения экстремальных задач;

3. должен владеть:

- понимать основные принципы постановки и исследования экстремальных задач математического моделирования и математической физики;

4. должен демонстрировать способность и готовность:

приобрести навыки решения типовых задач вариационного исчисления и оптимального управления.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 8 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю Тематический план дисциплины/модуля

| N  | Раздел<br>Дисциплины/<br>Модуля                                     | Семестр | Неделя<br>семестра | Виды и часы<br>аудиторной работы,<br>их трудоемкость<br>(в часах) |                         |                        | Текущие формы<br>контроля   |
|----|---|---------|--------------------|---|-------------------------|------------------------|-----------------------------|
|    |   |         |                    | Лекции  | Практические<br>занятия | Лабораторные<br>работы |                             |
| 1. | Тема 1. Постановка задач оптимального управления                    | 8       | 1-2                | 0   | 0                       | 4                      | Дискуссия                   |
| 2. | Тема 2. Классическое вариационное исчисление                        | 8       | 3-4                | 0   | 0                       | 4                      | Научный доклад              |
| 3. | Тема 3. Интегральное вариационное исчисление                        | 8       | 5-6                | 0   | 0                       | 4                      | Письменное домашнее задание |
| 4. | Тема 4. Дифференцирование отображений                               | 8       | 7-8                | 0   | 0                       | 4                      | Письменное домашнее задание |
| 5. | Тема 5. Гладкие задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств | 8       | 9-10               | 0   | 0                       | 4                      | Дискуссия                   |

| N  | Раздел Дисциплины/ Модуля                            | Семестр | Неделя семестра | Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах) |                      |                     | Текущие формы контроля      |
|----|--|---------|-----------------|--|----------------------|---------------------|-----------------------------|
|    |  |         |                 | Лекции   | Практические занятия | Лабораторные работы |                             |
| 6. | Тема 6. Оптимизация в бесконечномерных пространствах | 8       | 11-12           | 0  | 0                    | 4                   | Контрольная работа          |
| 7. | Тема 7. Принцип максимума Понтрягина                 | 8       | 13-14           | 0  | 0                    | 4                   | Письменное домашнее задание |
| 8. | Тема 8. Динамическое программирование Беллмана       | 8       | 15-16           | 0  | 0                    | 12                  | Письменная работа           |
|    | Тема . Итоговая форма контроля                       | 8       |                 | 0  | 0                    | 0                   | Экзамен                     |
|    | Итого  |         |                 | 0  | 0                    | 40                  |                             |

#### 4.2 Содержание дисциплины

##### Тема 1. Постановка задач оптимального управления

###### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

Основные понятия и терминология. Примеры задач оптимального управления.

##### Тема 2. Классическое вариационное исчисление

###### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

Простейшая задача КВИ. Задача Больца. Изопериметрическая задача. Задача с подвижными концами. Расширение класса искомых функций.

##### Тема 3. Интегральное вариационное исчисление

###### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

Простейшая задача ИВИ. Аналог задачи Больца. Изопериметрическая задача. Задача с подвижными концами. Классы искомых функций.

##### Тема 4. Дифференцирование отображений

###### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

Производные отображений. Теорема о суперпозиции и теорема о среднем. Дифференцирование в произведении пространств. Оператор Немыцкого. Производные интегральных функционалов.

##### Тема 5. Гладкие задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств

###### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

Условия экстремума функционалов. Правило множителей Лагранжа.

##### Тема 6. Оптимизация в бесконечномерных пространствах

###### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

Градиентные методы. Задача ОУ с линейным уравнением состояний и квадратичным функционалом. Оптимальное управление температурой стержня.

##### Тема 7. Принцип максимума Понтрягина

###### *лабораторная работа (4 часа(ов)):*

Задача ОУ с закрепленным временем и свободным концом. Общий случай задачи ОУ. Простейшая задача о быстродействии.

##### Тема 8. Динамическое программирование Беллмана

###### *лабораторная работа (12 часа(ов)):*

Основная идея метода. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана. Примеры. Алгоритм метода динамического программирования.

### 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

| N  | Раздел Дисциплины   | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|----|---|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 1. | Тема 1. Постановка задач оптимального управления                    | 8       | 1-2             | подготовка к дискуссии                | 4                      | дискуссия                             |
| 2. | Тема 2. Классическое вариационное исчисление                        | 8       | 3-4             | подготовка к научному докладу         | 4                      | научный доклад                        |
| 3. | Тема 3. Интегральное вариационное исчисление                        | 8       | 5-6             | подготовка домашнего задания          | 4                      | домашнее задание                      |
| 4. | Тема 4. Дифференцирование отображений                               | 8       | 7-8             | подготовка домашнего задания          | 4                      | домашнее задание                      |
| 5. | Тема 5. Гладкие задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств | 8       | 9-10            | подготовка к дискуссии                | 4                      | дискуссия                             |
| 6. | Тема 6. Оптимизация в бесконечномерных пространствах                | 8       | 11-12           | подготовка к контрольной работе       | 4                      | контрольная работа                    |
| 7. | Тема 7. Принцип максимума Понтрягина                                | 8       | 13-14           | подготовка домашнего задания          | 4                      | домашнее задание                      |
| 8. | Тема 8. Динамическое программирование Беллмана                      | 8       | 15-16           | подготовка к письменной работе        | 4                      | письменная работа                     |
|    | Итого   |         |                 |                                       | 32                     |                                       |

### 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Широкое использование активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой

### 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

#### Тема 1. Постановка задач оптимального управления

дискуссия, примерные вопросы:

Изучение литературных и интернет-источников, подготовка к дискуссии по темам: Основные понятия и терминология. Примеры задач оптимального управления.

#### Тема 2. Классическое вариационное исчисление

научный доклад, примерные вопросы:

Изучение литературных и интернет-источников, подготовка докладов по темам: Простейшая задача КВИ. Задача Больца. Изопериметрическая задача. Задача с подвижными концами. Расширение класса искомых функций.

#### Тема 3. Интегральное вариационное исчисление

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение литературных и интернет-источников по темам: Простейшая задача ИВИ. Аналог задачи Больца. Изопериметрическая задача. Задача с подвижными концами. Классы искомых функций.

#### **Тема 4. Дифференцирование отображений**

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение литературных и интернет-источников по темам: Производные отображений. Теорема о суперпозиции и теорема о среднем. Дифференцирование в произведении пространств. Оператор Немыцкого. Производные интегральных функционалов.

#### **Тема 5. Гладкие задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств**

дискуссия , примерные вопросы:

Изучение литературных и интернет-источников, подготовка к дискуссии по темам: Условия экстремума функционалов. Правило множителей Лагранжа.

#### **Тема 6. Оптимизация в бесконечномерных пространствах**

контрольная работа , примерные вопросы:

Изучение литературных и интернет-источников, подготовка к проверке знаний по темам: Градиентные методы. Задача ОУ с линейным уравнением состояний и квадратичным функционалом. Оптимальное управление температурой стержня.

#### **Тема 7. Принцип максимума Понтрягина**

домашнее задание , примерные вопросы:

Изучение литературных и интернет-источников по темам: Задача ОУ с закрепленным временем и свободным концом. Общий случай задачи ОУ. Простейшая задача о быстродействии.

#### **Тема 8. Динамическое программирование Беллмана**

письменная работа , примерные вопросы:

Изучение литературных и интернет-источников, подготовка письменного отчета по теме: Алгоритм метода динамического программирования.

#### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

Экзаменационные вопросы:

1. Постановка задач оптимального управления.
2. Простейшая задача классического вариационного исчисления.
3. Задача Больца классического вариационного исчисления.
4. Изопериметрическая задача классического вариационного исчисления.
5. Задача с подвижными концами классического вариационного исчисления.
6. Расширение класса искомых функций.
7. Простейшая задача интегрального вариационного исчисления.
8. Аналог задачи Больца.
9. Изопериметрическая задача интегрального вариационного исчисления.
10. Задача с подвижными концами интегрального вариационного исчисления.
11. Классы искомых функций в задачах вариационного исчисления.
12. Дифференцирование отображений.
13. Теорема о суперпозиции и теорема о среднем.
14. Дифференцирование в произведении пространств.
15. Производные интегральных функционалов.
16. Гладкие экстремальные задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств.
17. Необходимые и достаточные условия экстремума функционалов.
18. Правило множителей Лагранжа.
19. Градиентные методы в бесконечномерных пространствах.

20. Задача оптимального управления с линейным уравнением состояний и квадратичным функционалом.
21. Оптимальное управление температурой стержня.
22. Принцип максимума Понтрягина.
23. Задача ОУ с закрепленным временем и свободным концом.
24. Общий случай задачи оптимального управления.
25. Простейшая задача о быстродействии.
26. Динамическое программирование Беллмана.
27. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана.
28. Алгоритм метода динамического программирования.

### 7.1. Основная литература:

1. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения : учебник для физических и физико-математических факультетов университетов / Л. Э. Эльсгольц .- Изд. стер. - Москва : URSS : [Изд-во ЛКИ, 2013] .- 309 с.
2. Васильева А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А. Б. Васильева [и др.].-Изд. 3-е, испр.-Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2010.-429 с.
3. Победаш П. Н. Модели оптимального управления и операционного исчисления для многокритериального анализа экономических систем [Электронный ресурс] : монография / П. Н. Победаш, Е. С. Семенкин. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. - 260 с.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=4923623>.
4. Пантелеев, А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс [Электронный ресурс] : учеб. пособие с мультимедиа сопровождением / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, К. А. Рыбаков. - М.: Логос, 2010. - 384 с.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=469288>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Н. М. Матвеев .? 5-е изд., доп. - СПб. : ЛАНЬ, 2003 .- 832 с.
2. Васильев О.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях / О. В. Васильев, А. В. Аргучинцев .? Москва : Физматлит, 1999 .? 208 с.
3. Балдин, К. В. Математические методы и модели в экономике [Электронный ресурс] : учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев; под общ. ред. К. В. Балдина. - М.: ФЛИНТА : НОУ ВПО "МПСи", 2012. - 328 с.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=454661>

### 7.3. Интернет-ресурсы:

- Математические методы - <http://znanium.com/bookread.php?book=137102>  
Модели оптимального управления - <http://znanium.com/bookread.php?book=4923623>  
Монография Ю.П.Петрова - <http://znanium.com/bookread.php?book=350744>  
Очерки истории управления - <http://znanium.com/bookread.php?book=350298>  
сайт Н.Б.Плещинского - [www.abcpnb.ru](http://www.abcpnb.ru)

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Вариационное исчисление и оптимальное управление" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:



Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Теоретические занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером)

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Плещинский Н.Б. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Бахтиева Л.У. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.