

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор
по образовательной деятельности КФУ
Проф. Таюрский Д.А.

_____ 20__ г.

Программа дисциплины
Коммутативная алгебра Б1.В.ДВ.7

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Алгебра

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Скрябин С.М.

Рецензент(ы):

Тронин С.Н.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Арсланов М. М.

Протокол заседания кафедры No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Регистрационный No

Казань
2016

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) старший научный сотрудник, д.н. Скрябин С.М. Отдел алгебры и математической логики НИЦ НИИММ им.Н.Г.Чеботарева , Serge.Skryabin@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Коммутативная алгебра --- это теория коммутативных колец и модулей над ними. Коммутативность позволяет наиболее далеко продвинуться в понимании структурных свойств изучаемых объектов и является первопричиной специфичности этой науки в сравнении с общей теорией колец и модулей. Коммутативная алгебра составляет аппарат современной алгебраической геометрии, и в самой коммутативной алгебре наблюдается слияние алгебраических и геометрических методов. Важность коммутативной алгебры обуславливается также приложениями к теории чисел. Исторически, именно потребности теории чисел привели к формированию понятия кольца.

Кольца, рассматриваемые в теории чисел составлены из целых элементов конечных расширений поля рациональных чисел \mathbb{Q} . В свое время не подвергалось сомнению, что однозначность разложения чисел в произведение простых множителей имеет место в каждом числовом кольце. На этом свойстве было основано одно из ошибочных доказательств знаменитой теоремы Ферма. Детальное исследование арифметики колец целых алгебраических чисел немецкими математиками 19-го века увенчалось созданием теории идеалов (идеальных чисел в первоначальной терминологии). Как выясняется, в произвольном кольце целых алгебраических чисел любой идеал однозначно раскладывается в произведение простых идеалов, и только в кольцах главных идеалов это сводится к факторизации элементов. Целостные коммутативные кольца, в которых выполняется сформулированное выше свойство разложения для идеалов получили название дедекиндовых.

В алгебраической геометрии дедекиндовы кольца появляются как алгебры функций на неособых аффинных алгебраических кривых. Алгебраические многообразия произвольной размерности приводят к более общим коммутативным кольцам, в которых простые идеалы допускают наглядную геометрическую интерпретацию в терминах замкнутых подмногообразий исходного многообразия. По этой причине простые идеалы играют чрезвычайно важную роль в коммутативной алгебре. В частности, возникают вопросы о соответствии простых идеалов одного коммутативного кольца и некоторого его расширения. К числу фундаментальных результатов относятся теоремы о подъеме и о спуске цепочек простых идеалов.

По существу любой вопрос из алгебраической геометрии может быть переформулирован в терминах коммутативных колец. Первый мостик между алгеброй и геометрией был переброшен теоремой Гильберта о нулях. Слабая форма теоремы Гильберта о нулях утверждает, что любой набор многочленов f_1, f_2, \dots от конечного числа переменных x_1, \dots, x_n с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле k имеет общий нуль в k^n при условии, что идеал кольца многочленов $k[x_1, \dots, x_n]$, порожденный f_1, f_2, \dots , не содержит ненулевых констант.

Важной особенностью коммутативной теории является то, что каждое мультипликативно замкнутое подмножество S кольца R позволяет построить новое кольцо RS^{-1} , называемое кольцом частных кольца R относительно S , в которое R гомоморфно отображается и образы всех элементов из S

обратимы по умножению. Данная конструкция обобщает поле частных коммутативной области целостности. Идеал RP кольца R прост тогда и только тогда, когда его дополнение $R \setminus P$ мультипликативно замкнуто. При этом кольцо частных кольца R относительно $R \setminus P$ локально, т.е. имеет единственный максимальный идеал. Многие доказательства в коммутативной алгебре основаны на переходе к локальным кольцам простых идеалов. Полезно отметить, что локальные дедекиндовы кольца связаны с дискретными нормированиями полей. Свойства произвольного дедекиндова кольца часто доказываются также методом локализации.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ДВ.7 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.04.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 3 семестр.

Дисциплина 'Коммутативная алгебра' предполагает знания, излагаемые в стандартных университетских курсах общей и абстрактной алгебры.

В свою очередь коммутативная алгебра необходима для глубокого изучения теории колец, теории чисел, алгебраической геометрии.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способность к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность публично представить собственные новые научные результаты
ПК-4 (профессиональные компетенции)	способность к применению методов математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач

В результате освоения дисциплины студент:

логически мыслить, проверять истинность доказываемых утверждений, самостоятельно проводить математические рассуждения

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 3 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Основные конструкции коммутативной алгебры	3	1-6	6	6	0	
2.	Тема 2. Целые расширения коммутативных колец. Конечно порождённые алгебры.	3	7-12	6	6	0	
3.	Тема 3. Дедекиндовы кольца и факториальность	3	13-18	6	6	0	
	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	экзамен
	Итого			18	18	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Основные конструкции коммутативной алгебры

лекционное занятие (6 часа(ов)):

Кольца, идеалы и гомоморфизмы. Факторкольца. Конструкция кольца многочленов с коэффициентами в заданном кольце. Продолжение гомоморфизмов на факторкольца и на кольца многочленов. Китайская теорема об остатках. Операции над идеалами. Радикал идеала. Расширение и сужение идеалов относительно гомоморфизма колец. Соответствие между идеалами исходного кольца и его факторкольца. Делители нуля. Обратимые элементы. Области целостности и поля. Простые и максимальные идеалы. Характеризация простых и максимальных идеалов в терминах факторколец. Существование максимальных идеалов. Критерий обратимости элемента кольца. Локальные кольца и их характеристика. Нильрадикал кольца и его описание как пересечения простых идеалов. Свойства включения для простых идеалов. Кольца частных. Мультипликативно замкнутые подмножества. Конструкция кольца частных. Канонический гомоморфизм в кольцо частных и его свойства. Продолжение гомоморфизмов на кольца частных. Соответствие между простыми идеалами исходного кольца и его кольца частных. Полное кольцо частных. Поле частных целостного кольца. Локализация кольца в простом идеале. Модули над кольцом. Подмодули, фактормодули, гомоморфизмы. Теорема о гомоморфизме для модулей. Свободные модули. Инвариантность числа элементов в базисе. Аннуляторы конечно порождённых модулей. Лемма Накаямы. Модули без кручения над кольцом главных идеалов.

практическое занятие (6 часа(ов)):

решение задач

Тема 2. Целые расширения коммутативных колец. Конечно порождённые алгебры.

лекционное занятие (6 часа(ов)):

Элементы кольца, целые над подкольцом. Характеризации целых элементов. Целые расширения колец. Транзитивность целых расширений. Целое замыкание подкольца. Поле алгебраических чисел и кольцо целых алгебраических чисел. Целые расширения факторколец и колец частных. Теорема о подъёме для простых идеалов. Размерность Крулля и её сохранение в целом расширении. Целозамкнутые области целостности. Теорема Коэна-Зайденберга о спуске. Нётеровы кольца и модули. Эквивалентные характеризации нётеровых модулей. Соотношение между нётеровостью модуля, его подмодуля и фактормодуля. Нётеровость конечно-порожденных модулей над нётеровым кольцом. Теорема Гильберта о базисе. Теорема о множестве простых идеалов, содержащих заданный идеал нётерова кольца. Конечность числа минимальных элементов этого множества. Ассоциированные простые идеалы и делители нуля. Примарное разложение идеалов в нётеровом кольце. Первая и вторая теорема единственности. Алгебры над полем. Конечно порождённые алгебры над полем. Теорема о конечной порождённости подалгебр. Конечная порождённость подалгебры инвариантных элементов относительно действия конечной группы автоморфизмов. Продолжение гомоморфизмов из области целостности в алгебраически замкнутое поле. Теорема Гильберта о нулях. Критерий существования решения системы алгебраических уравнений. Геометрическая интерпретация. Соответствие между алгебраическими подмножествами в конечномерном аффинном пространстве и идеалами кольца многочленов. Топология Зарисского. Аффинные алгебраические многообразия.

практическое занятие (6 часа(ов)):

заслушивание докладов по распределенным темам

Тема 3. Дедекиндовы кольца и факториальность

лекционное занятие (6 часа(ов)):

Дробные идеалы целостного кольца. Операции над дробными идеалами. Обратимые дробные идеалы. Эквивалентные характеризации дедекиндовых колец. Единственность разложения идеалов в произведение максимальных идеалов. Факториальные кольца. Дедекиндовость и факториальность колец главных идеалов. Целое замыкание дедекиндова кольца в конечном расширении его поля частных. Теорема Крулля-Акидзуки. Разложение простых идеалов дедекиндова кольца в его целом расширении. Индексы ветвления и степени полей вычетов. Приложения к теории алгебраических чисел. Дискретные нормирования и их кольца.

практическое занятие (6 часа(ов)):

заслушивание докладов по распределенным темам

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Основные конструкции коммутативной алгебры	3	1-6	контрольная работа	12	проверка
2.	Тема 2. Целые расширения коммутативных колец. Конечно порождённые алгебры.	3	7-12	устный опрос	12	доклады на практических занятиях
3.	Тема 3. Дедекиндовы кольца и факториальность	3	13-18	устный опрос	12	доклады на практических занятиях
	Итого				36	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Активные и интерактивные формы - лекции, практические занятия, контрольные работы, экзамен.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Основные конструкции коммутативной алгебры

проверка , примерные вопросы:

1. Найти необходимое и достаточное условие нильпотентности элементов кольца многочленов с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце. 2. Найти все простые идеалы в кольце целых чисел.

Тема 2. Целые расширения коммутативных колец. Конечно порождённые алгебры.

доклады на практических занятиях , примерные вопросы:

1. Транзитивность целых расширений. 2. Теорема Гильберта о нулях.

Тема 3. Дедекиндовы кольца и факториальность

доклады на практических занятиях, примерные вопросы:

1. Разложение идеалов дедекиндова кольца в произведение простых идеалов. 2. Законы ветвления для расширений дедекиндовых колец.

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к экзамену:

1. Основные операции над идеалами коммутативного кольца.
2. Элементы, целые над подкольцом. Характеризации целых элементов.
3. Факторкольца. Китайская теорема об остатках.
4. Целые расширения колец. Теорема о подъеме для простых идеалов.
5. Простые и максимальные идеалы. Критерии простоты и максимальности в терминах факторколец.
6. Целозамкнутые области целостности. Теорема о спуске.
7. Лемма Цорна. Существование максимальных идеалов.
8. Дискретные нормирования и связанные с ними кольца. Характеризации колец дискретного нормирования.
9. Нильпотентные элементы. Нильрадикал кольца. Описание нильрадикала как пересечения простых идеалов.
10. Дедекиндовы кольца и их характеристика.
11. Построение кольца частных относительно мультипликативно замкнутого множества. Свойство универсальности кольца частных.
12. Разложение идеалов дедекиндова кольца в произведение простых идеалов.
13. Соответствие между идеалами исходного кольца и его кольца частных.
14. Целое замыкание дедекиндова кольца в конечном расширении его поля частных.
15. Локальные кольца. Локализация кольца в его простом идеале.
16. Аппроксимационные теоремы для дедекиндова кольца.
17. Конечно порожденные модули. Лемма Накаямы.
18. Факториальность колец многочленов.
19. Строение конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов.
20. Слабая форма теоремы Гильберта о нулях.

7.1. Основная литература:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- Спб: Лань,2013-432 с.
<http://e.lanbook.com/view/book/30198/>
2. Лекции по теории чисел / П. Г. Л. Дирихле; в обраб. и с доб. Р. Дедекинда ; пер. с нем. А. И. и С. И. Каменецких ; под ред. проф. Б. И. Сегала. Изд. 4-е . Москва : URSS : [ЛИБРОКОМ, 2013] . 369 с
3. Конечномерные алгебры : учебно-методическое пособие / Н. А. Корешков, С. М. Скрыбин ; Казан. федер. ун-т, Ин-т математики и механики им. Н. И. Лобачевского. Казань : [Казанский университет], 2014 . 55 с

7.2. Дополнительная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры -- Новое издание, перераб. и доп. -- М.: МЦНМО, 2011. -- 592 с.
<http://e.lanbook.com/view/book/9311/>
2. М. Атья, И. Макдональд, Коммутативная алгебра.. М.: Мир, 1972.
3. С. Ленг, Алгебра. М.: Мир, 1968.
4. А.И. Кострикин, Введение в алгебру. Основные структуры. М.: Физматлит, 2000.
5. Манин Ю.И. , Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел. - М.: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2009. - 552 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9368

7.3. Интернет-ресурсы:

- Винберг Э.Б. Курс алгебры. - <https://e.lanbook.com/reader/book/56396/#>
- Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры. - <https://e.lanbook.com/reader/book/59284/#1>
- Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - <https://e.lanbook.com/reader/book/30198/#1>
- Курош А.Г. Теория групп. - <https://e.lanbook.com/reader/book/59755/#1>
- Тронин С.Н. Лекции по алгебре. Вып.3. - http://kpfu.ru/docs/F1878089969/ALG_3.pdf

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Коммутативная алгебра" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

проектор

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе Алгебра .

Автор(ы):

Скрябин С.М. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Тронин С.Н. _____

"__" _____ 201__ г.