МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.

"___"___________20___ г.

*подписано электронно-цифровой подписью*

# Программа дисциплины

Вычислимые теории моделей 1 Б1.В.ДВ.4

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика
Профиль подготовки: Алгебра
Квалификация выпускника: магистр
Форма обучения: очное
Язык обучения: русский
**Автор(ы):**
Ямалеев М.М.
**Рецензент(ы):**
Арсланов М.М.

**СОГЛАСОВАНО:**
Заведующий(ая) кафедрой: Арсланов М. М.
Протокол заседания кафедры No ___ от "____" ___________ 201__г
Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :
Протокол заседания УМК No ____ от "____" ___________ 201__г

Регистрационный No 81721817

Казань
2017

## Содержание

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. Ямалеев М.М. Кафедра алгебры и математической логики отделение математики , Mars.Yamaleev@kpfu.ru

## 1. Цели освоения дисциплины

Главной целью освоения дисциплины (модуля) 'Вычислимые теории моделей 1' является обучение студентов методам решения задач Вычислимых теорий моделей и соответствующему мышлению. В процессе обучения требуется дать студентам запас базовых знаний по основным разделам теории вычислимых структур, обучить рациональному и эффективному использованию полученных знаний при решении типовых задач теории вычислимых структур; сформировать у студентов представление о теории вычислимых структур как методе изучения широкого круга объектов и процессов; сформировать знания, умения и навыки использования основных понятий теории вычислимых структур. Формирование логической и математической культуры студента, фундаментальная подготовка в области дискретной математики, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

## 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ДВ.4 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.04.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 1 курсе, 2 семестр.

'Вычислимые теории моделей 1' входит в цикл дисциплин по выбору. Для успешного изучения вычислимых теорий моделей 1 необходимы знания и умения в объеме школьной программы по математике, общие понятия и факты из математического анализа, дискретной математики и математической логики. Освоение дисциплины 'Вычислимые теории моделей 1' необходимо для эффективного использования возможностей современной вычислительной техники, изучения программирования и информатики. Знание основ вычислимых теорий моделей 1 необходимо практически в любой современной научно-исследовательской работе по математической логике.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции | Расшифровка приобретаемой компетенции |
|---|---|
| ОПК-2 (профессиональные компетенции) | способностью создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках |
| ОПК-3 (профессиональные компетенции) | готовностью самостоятельно создавать прикладные программные средства на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов |
| ОПК-5 (профессиональные компетенции) | готовность руководить коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия |
| ПК-10 (профессиональные компетенции) | способностью к преподаванию физико-математических дисциплин и информатики в образовательных организациях основного общего, среднего общего, среднего профессионального и высшего образования |
| ПК-11 (профессиональные компетенции) | способностью и предрасположенностью к просветительной и воспитательной деятельности, готовность пропагандировать и популяризировать научные достижения |

| Шифр компетенции | Расшифровка приобретаемой компетенции |
|---|---|
| ПК-12 (профессиональные компетенции) | способностью к проведению методических и экспертных работ в области математики |
| ПК-2 (профессиональные компетенции) | способностью к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом |
| ПК-3 (профессиональные компетенции) | способностью публично представить собственные новые научные результаты |
| ПК-4 (профессиональные компетенции) | способностью к применению методов математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач |
| ПК-5 (профессиональные компетенции) | способностью к творческому применению, развитию и реализации математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах |
| ПК-7 (профессиональные компетенции) | способностью к применению методов математического и алгоритмического моделирования при анализе экономических и социальных процессов, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики |
| ПК-9 (профессиональные компетенции) | способностью различным образом представлять и адаптировать математические знания с учетом уровня аудитории |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

Основные понятия теории множеств и математической логики, определения и свойства математических объектов, используемых в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

2. должен уметь:

Решать задачи теоретического и прикладного характера из различных разделов теории множеств и математической логики, доказывать утверждения, строить модели объектов и понятий.

3. должен владеть:

Математическим аппаратом теории множеств и математической логики, методами доказательства утверждений в этой области, навыками алгоритмизации основных задач.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

Освоить основные понятия теории вычислимых моделей, определения и свойства алгебраических структур, используемых в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

## 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных(ые) единиц(ы) 216 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен во 2 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

**Тематический план дисциплины/модуля**

| N | Раздел Дисциплины/ Модуля | Семестр | Неделя семестра | Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах) | | | Текущие формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | |
| 1. | Тема 1. Вычислимые множества и функции. Основные понятие теории нумераций. Нумерованные алгебраические системы. | 2 | 1-2 | 4 | 8 | 0 | Устный опрос Письменное домашнее задание |
| 2. | Тема 2. Вычислимые нумерации и конструктивные модели. Существование конструктивизаций. Вычислимые графы, группы, кольца, поля. | 2 | 3-4 | 4 | 8 | 0 | Письменное домашнее задание Контрольная работа |
| 3. | Тема 3. Разрешимость однородных моделей. Тьюринговые степени и спектральная универсальность графов. | 2 | 5-7 | 6 | 12 | 0 | Устный опрос Презентация |
| . | Тема . Итоговая форма контроля | 2 | | 0 | 0 | 0 | Экзамен |
| | Итого | | | 14 | 28 | 0 | |

### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Вычислимые множества и функции. Основные понятие теории нумераций. Нумерованные алгебраические системы.**

***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Понятие вычислимости и машины Тьюринга. Вычислимые и вычислимо перечислимые множества и функции. Теорема Поста. Тьюринговые степени. Нумерации. Вычислимые и геделевские нумерации. Нумерации, как способ эффективного задания алгебраических объектов. Существование универсальных нумераций и сводимость между нумерациями.

***практическое занятие (8 часа(ов)):***

Вычислимые и вычислимо перечислимые множества и функции. Теорема Поста. Тьюринговые степени. Нумерации. Вычислимые и геделевские нумерации. Кодирование элементов поля рациональных чисел и элементов различных графов. Кодирование машин Тьюринга. Нумерации, как способ эффективного задания алгебраических объектов. Существование универсальных нумераций и сводимость между нумерациями.

**Тема 2. Вычислимые нумерации и конструктивные модели. Существование конструктивизаций. Вычислимые графы, группы, кольца, поля.**

***лекционное занятие (4 часа(ов)):***

Алгебраические структуры и их элементарные теории. Вычислимость на алгебраических структурах и моделях. Отношения конгруэнтности на алгебраических структурах. Элементарная эквивалентность и элементарные подструктуры. Изоморфные копии алгебраических структур. Конструктивизации алгебраических структур. Вычислимые, конструктивные и разрешимые модели.

***практическое занятие (8 часа(ов)):***

Теории языка первого порядка. Вычислимые теории. Элементарная эквивалентность и элементарные подструктуры. Изоморфные копии алгебраических структур. Конструктивизации алгебраических структур. Вычислимость и теории языка первого порядка на примере графов, групп, колец, полей, линейных порядков, частично-упорядоченных множеств.

**Тема 3. Разрешимость однородных моделей. Тьюринговые степени и спектральная универсальность графов.**

***лекционное занятие (6 часа(ов)):***

Разрешимость однородных моделей. Относительная сложность алгебраических структур. Графы - как спектрально универсальные алгебраические объекты. Тьюрингова степень проблемы остановки. Проблема Поста и существование неполных вычислимо перечислимых степеней. Изоморфизм алгебраических структур и существование вычислимых копий для структур с функциями и предикатами различной алгоритмической сложности.

***практическое занятие (12 часа(ов)):***

Метод приоритета с конечными нарушениями на примере решения проблемы Поста. Эффективное кодирование при помощи графов таких структур и моделей, как абелевы группы, модели натуральных чисел, линейных порядков, булевых алгебр.

### 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

| N | Раздел Дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Тема 1. Вычислимые множества и функции. Основные понятие теории нумераций. Нумерованные алгебраические системы. | 2 | 1-2 | подготовка домашнего задания | 20 | письменное домашнее задание |
| | | | | подготовка к устному опросу | 18 | устный опрос |
| 2. | Тема 2. Вычислимые нумерации и конструктивные модели. Существование конструктивизаций. Вычислимые графы, группы, кольца, поля. | 2 | 3-4 | подготовка домашнего задания | 20 | письменное домашнее задание |
| | | | | подготовка к контрольной работе | 20 | контрольная работа |
| 3. | Тема 3. Разрешимость однородных моделей. Тьюринговые степени и спектральная универсальность графов. | 2 | 5-7 | подготовка к презентации | 22 | презентация |
| | | | | подготовка к устному опросу | 38 | устный опрос |
| | Итого | | | | 138 | |

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Работа в малых группах, изучение и закрепление нового материала на интерактивной лекции, обсуждение и разрешение проблем. Индивидуальные выступления с докладами.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

**Тема 1. Вычислимые множества и функции. Основные понятие теории нумераций. Нумерованные алгебраические системы.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

1. Кодировака машины Тьюринга, вычисляющей f(x,y)=xy 2. Множество проблемы остановки и эквивалентные множества 3. Арифметическая иерархия и полнота некоторых множеств (Fin, Inf, Comp, Ext и др.) 4. Доказать, что множество вычислимо тогда и только тогда, когда оно и его дополнение являются в.п. 5. Доказать эквивалетность произвольных геделевских нумераций. 6. Задать алгебраические структуры (абелеву группу, счетный линейный порядок, булеву алгебру) при помощи нумераций. В каких случаях эти структуры будут вычислимыми?

устный опрос , примерные вопросы:

1. Что такое индексное множество? Примеры индексных множеств. 2. Привести пример невычислимого в.п. множества и функции. 3. Что такое Тьюрингова степень? 4. Привести доказательство существование универсальной нумерации. 5. Каким образом при помощи графа можно эффективно закодировать произвольную алгебраическую структуру? 6. Идеи и методы доказательства теорема Поста.

**Тема 2. Вычислимые нумерации и конструктивные модели. Существование конструктивизаций. Вычислимые графы, группы, кольца, поля.**

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Что представляют собой полные теории в чистом языке равенства? Сформулируйте простой критерий эквивалентности двух моделей этого языка. 2. С помощью элиминации кванторов опишите разрешающую процедуру для теории абелевых групп. 3. Всегда ли будут существовать нетривиальные вычислимо-изоморфные копии? Ответ пояснить. 4. Объясните, почему полная теория чисел не имеет насыщенной модели. 5. Какие из следующих теорий являются моделено-полными: теория бесконечных множеств, плотного линейного порядка без концевых точек, безатомных булевых алгебр, полных абелевых групп без кручения. 6. Обоснуйте подмодельную полноту теории вещественно замкнутых полей в предположении ее модельной полноты. 7. Приведите пример бесконечного ультрапроизведения конечных множеств.

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

1. Привести примеры вычислимых и невычислимых алгебраических объектов (графов, групп, колец, полей). 2. Доказать, что E-теории конструктивных моделей являются в.п. 3. Доказать, что если в.п. аксиоматизируемая AE-теория T имеет первичную модель, то T имеет конструктивизируемую модель. 4. Пусть T- разрешимая теория, тогда существует последовательность сильно конструктивных моделей, что T является пределом их теорий. 5. Привести эффективный способ построения по разрешимой теории T некоторой сильно конструктивной модели этой теории.

**Тема 3. Разрешимость однородных моделей. Тьюринговые степени и спектральная универсальность графов.**

презентация , примерные вопросы:

1. Метод приоритета с конечными нарушениями на примере решения проблемы Поста. 2. Креативные, продуктивные и простые множества. 3. Доказательство теоремы о том, что если семейство всех вычислимых типов полной теории вычислимо, то семейство всех главных типов этой теории вычислимо и полно. 4. Привести схему доказательства критерия Морли 5. Построить граф, алгоритмическая сложность которого будет эквивалентна сложности заданного линейного порядка.

устный опрос , примерные вопросы:

1. Будет ли каждый вычислимый тип теории T сигнатуры s реализовываться в некоторой разрешимой модели теории T? 2. Будет ли семейство всех конечных типов, реализуемых в некоторой разрешимой модели, вычислимым? 3. Привести доказательство того, что если семейство всех главных типов теории T плотно и вычислимо, то простая модель этой теории разрешима. 4. Схема доказательства теоремы о вычислимом семействе конечных типов теории T. 5. Доказать, что если семейство всех вычислимых типов вычислимо, то теории T имеет простую модель и эта модель сильно конструктивизируемая. 6. Доказать, что если теория T имеет счетно насыщенную модель и эта модель сильно конструктивизируема, то и простая модель теории T сильно конструктивизируема.

**Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к экзамену:

Вопросы к экзамену

1. Теории, способы задания теорий. Классы алгебраических систем.

2. Аксиоматизация теорий. Аксиоматизируемые классы. Конечная аксиоматизация.

3. Расширения теорий. Консервативные расширения. Критерий консервативности. Теорема Робинсона.

4. Полные теории. Конечные модели полных теорий.

5. Категоричность. Теорема Лося-Воота. Категоричность теории плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.

6. Вычислимые и вычислимо перечислимые множества. Проблема остановки и решение проблемы Поста.

7. Элиминация кванторов. Элиминация кванторов в теориях плотного и дискретного порядков без крайних элементов.

8. Подсистемы и надсистемы. Пересечение подсистем. Подсистемы, порожденные множеством.

9. Элементарные подсистемы и надсистемы. Критерий элементарности.

10. Индексные множества Fin, Inf, Comp, Ext и их полнота.

11. Нумерации. Геделевские нумерации. Задание моделей и алгебраических структур при помощи нумераций. Существование универсальной нумерации.

12. Конструктивные модели и вычислимые алгебраические структуры.

13. Критерий Морли.

14. Теоремы о вычислимом семействе конечных типов теории T.

15. Конструктивизируемость моделей. E- и AE-теории для конструктивных моделей.

16. Типы. Реализация и опускание типов. Главные и неглавные типы.

17. Элементарные отображения. Атомные, универсальные и насыщенные системы. Теорема Рыль-Нардзевского.

18. Графы, группы, кольца, поля, линейные порядки и кодирование одних алгебраических структур в другие.

19. Построения по разрешимой теории T некоторой сильно конструктивной модели этой теории.

20. Арифмитеческая иерархия, иерархия Ершова. Тьюринговые степени алгебраических объектов в этих иерархиях.

**7.1. Основная литература:**

1. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник / Пруцков А.В., Волкова Л.Л. - М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 152 с. [Электронный ресурс; Режим доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=558694]

2. Игошин В.И. Математическая логика : учеб. пособие / В.И. Игошин. - М. : ИНФРА-М, 2016. - 399 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=543156].

3. Смолин Ю.Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю. Н. Смолин. 4-е изд., стер. - М. : ФЛИНТА : Наука, 2012. - 464 с. [Электронный ресурс; Режим доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=456995].

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Бускарян Э. Теория моделей и алгебраическая геометрия. О доказательстве Э. Хрущовского гипотезы Морделла-Ленга. [Электронный ресурс] Электрон. дан. М. : МЦНМО, 2008. 280 с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/9299 Загл. с экрана.

2. Лихтарников Л.М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. [Электронный ресурс] / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. Электрон. дан. СПб. : Лань, 2009. 288 с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/231 Загл. с экрана.

3. Успенский, В.А. Вводный курс математической логики. [Электронный ресурс] Электрон. дан. М. : Физматлит, 2007. 128 с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/2355 Загл. с экрана.

### 7.3. Интернет-ресурсы:

Интернет библиотека научной литературы - http://libgen.io/

Интернет справочник - https://ru.wikipedia.org

Методические пособия кафедры алгебры и математической логики КФУ - http://kpfu.ru/math-d/strctre/otdeleniya-i-kafedry/alg-n-math-d-log/metodicheskie-posobiya

Новак, В. Математические принципы нечеткой логики. [Электронный ресурс] В. Новак, И. Перфильева, И. Мочкорж. Электрон. дан. М. : Физматлит, 2006. 352 с. - http://e.lanbook.com/book/2747

Окунев, Л.Я. Высшая алгебра. [Электронный ресурс] Электрон. дан. СПб. : Лань, 2009. 336 с. - http://e.lanbook.com/book/289

### 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Вычислимые теории моделей 1" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB,audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудованием имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе Алгебра .

Автор(ы):
Ямалеев М.М. ____________________
"__" _________ 201 __ г.

Рецензент(ы):
Арсланов М.М. ____________________
"__" _________ 201 __ г.