

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.

_____ 20__ г.

подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины
Теория представлений Б1.В.ДВ.8

Направление подготовки: 01.04.01 - Математика

Профиль подготовки: Алгебра

Квалификация выпускника: магистр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Скрябин С.М.

Рецензент(ы):

Абызов А.Н.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Арсланов М. М.

Протокол заседания кафедры No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Регистрационный No 81725916

Казань
2016

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) ведущий научный сотрудник, д.н. Скрыбин С.М. Центр превосходства в области математического образования Институт математики и механики им.Н.И.Лобачевского , Serge.Skryabin@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Важность абстрактных алгебраических структур с точки зрения приложений в значительной степени обуславливается возможностью реализации элементов алгебраических структур линейными операторами. В частности, конкретные группы часто появляются как группы симметрий той или иной физической системы. По этой причине теория представлений существенно используется в некоторых разделах физики, например, в квантовой механике.

Формально, линейное представление заданной группы G определяется как произвольный гомоморфизм $G \rightarrow GL(V)$ в группу обратимых линейных операторов, действующих на векторном пространстве V . Возникает задача о классификации таких представлений. Одно из принципиальных соображений состоит в сведении произвольного представления к неприводимым представлениям. В случае конечной группы G многие вопросы, возникающие при изучении представлений решаются теорией характеров. Характер --- это некоторая функция на группе, связанная с заданным представлением. После того как характеры всех неприводимых представлений найдены, разложение произвольного представления в прямую сумму неприводимых представлений можно получить стандартными манипуляциями с функциями.

Теория представлений конечных групп --- это хорошо разработанная классическая область алгебры, владение методами которой необходимо каждому математику. С другой стороны, теория представлений развивает идеи курса линейной алгебры, беря в качестве объекта изучения уже не отдельный линейный оператор, а некоторую совокупность операторов.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ДВ.8 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.04.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 3 семестр.

Для успешного изучения дисциплины 'Теория представлений' необходимы знания, излагаемые в стандартных университетских курсах общей и абстрактной алгебры.

В свою очередь теория представлений предоставляет необходимый аппарат для более глубокого изучения различных разделов алгебры, теории чисел, алгебраических методов квантовой механики.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-3 (профессиональные компетенции)	способность к самостоятельной научно-исследовательской работе

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-10 (профессиональные компетенции)	способность к преподаванию физико-математических дисциплин и информатики в образовательных организациях основного общего, среднего общего, среднего профессионального и высшего образования
ПК-11 (профессиональные компетенции)	способность и предрасположенность к просветительной и воспитательной деятельности, готовность пропагандировать и популяризировать научные достижения
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способность к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом
ПК-9 (профессиональные компетенции)	способность различным образом представлять и адаптировать математические знания с учетом уровня аудитории

В результате освоения дисциплины студент:

логически мыслить, проверять истинность доказываемых утверждений, самостоятельно проводить математические рассуждения

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 3 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Основные понятия теории представлений	3	1-4	4	4	0	
2.	Тема 2. Теория характеров	3	5-9	5	5	0	
3.	Тема 3. Представления конкретных групп	3	10-14	5	5	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
4.	Тема 4. Конечномерные представления компактных групп	3	15-18	4	4	0	
	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	экзамен
	Итого			18	18	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Основные понятия теории представлений

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Изоморфность группы обратимых линейных операторов группе обратимых матриц. Линейные и матричные представления групп. Эквивариантные отображения. Построение эквивариантного линейного отображения, исходя из произвольного линейного отображения. Эквивалентность двух представлений. Инвариантные подпространства. Индуцированные представления в инвариантном подпространстве и в факторпространстве. Внешние и внутренние прямые суммы. Прямая сумма двух представлений. Контрагredientное представление. Неприводимые, приводимые и вполне приводимые представления. Теорема Машке. Лемма Шура и ее следствия. Матричная формулировка.

практическое занятие (4 часа(ов)):

решение задач

Тема 2. Теория характеров

лекционное занятие (5 часа(ов)):

След линейного оператора. Характер представления. Первое и второе соотношения ортогональности. Разложение регулярного представления. Формула для порядка группы в терминах степеней неприводимых представлений. Число неприводимых представлений. Функции классов. Тензорное произведение представлений. Кольцо характеров. Делимость порядка группы на степени неприводимых представлений. Индуцирование с подгруппы.

практическое занятие (5 часа(ов)):

заслушивание докладов

Тема 3. Представления конкретных групп

лекционное занятие (5 часа(ов)):

Одномерность неприводимых представлений коммутативных групп. Двойственная группа и ее свойства. Преобразование Фурье на конечных коммутативных группах. Таблицы характеров конечных групп малого порядка. Симметрические группы. Параметризация неприводимых представлений диаграммами Юнга. Полунормальная форма. Модули Шпехта. Правила ветвления. Размерности неприводимых представлений. Формула крюков.

практическое занятие (5 часа(ов)):

заслушивание докладов

Тема 4. Конечномерные представления компактных групп

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Топологические группы. Унитарные представления. Существование и единственность меры Хаара на компактной группе. Инвариантное интегрирование. Весовые разложения представлений торов. Теорема Петера-Вейля. Классификация неприводимых конечномерных представлений групп $SO(3)$ и $SU(2)$

практическое занятие (4 часа(ов)):

заслушивание докладов

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Основные понятия теории представлений	3	1-4	решение задач на освоение теоретического материала	13	контрольная работа
2.	Тема 2. Теория характеров	3	5-9	подготовка к докладам	14	устный опрос
3.	Тема 3. Представления конкретных групп	3	10-14	подготовка к докладам	14	устный опрос
4.	Тема 4. Конечномерные представления компактных групп	3	15-18	подготовка к докладам	13	устный опрос
	Итого				54	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Активные и интерактивные формы - лекции, практические занятия, контрольные работы, экзамен.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Основные понятия теории представлений

контрольная работа, примерные вопросы:

1. Составить таблицу характеров знакопеременной группы A_4 . 2. Разложить в прямую сумму неприводимых компонент представление симметрической группы S_4 , индуцированное с 2-мерного неприводимого представления ее подгруппы S_3 .

Тема 2. Теория характеров

устный опрос, примерные вопросы:

1. Соотношения ортогональности. 2. Классы сопряженности и пространство центральных функций на конечной группе.

Тема 3. Представления конкретных групп

устный опрос, примерные вопросы:

1. Преобразование Фурье на конечных коммутативных группах. 2. Комбинаторика диаграмм Юнга.

Тема 4. Конечномерные представления компактных групп

устный опрос, примерные вопросы:

1. Максимальные торы в компактных группах Ли. 2. Системы корней.

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к экзамену:

1. Три характеристики полной приводимости представлений.
2. Теорема Машке о полной приводимости.

3. Лемма Шура и следствие из неё.
4. Симметрическая билинейная форма на пространстве функций на группе. Соотношения между матричными элементами двух неприводимых представлений.
5. Четыре свойства характеров.
6. Первое соотношение ортогональности для характеров. Кратность вхождения неприводимого представления в разложение заданного представления.
7. Скалярный квадрат характера представления и критерий неприводимости.
8. Регулярное представление и его разложение в прямую сумму.
9. Конечность числа неэквивалентных неприводимых представлений. Соотношение между размерностями неприводимых представлений и порядком группы.
10. Разбиение группы на классы сопряжённых элементов. Выражение числа элементов, сопряжённых заданному элементу группы, через порядок централизатора.
11. Пространство центральных функций и два его базиса. Число неэквивалентных неприводимых представлений.
12. Второе соотношение ортогональности.
13. Таблица характеров группы перестановок S_4 .
14. Неприводимые представления коммутативных групп. Двойственная группа.
15. Построение меры Хаара на компактной группе.
16. Весовое разложение представления относительно тора.
17. Теорема Петера-Вейля.
18. Неприводимые представления ортогональной группы $SO(3)$.

7.1. Основная литература:

1. Теория групп / А. Г. Курош . Москва : Физматлит, 2011 . 808 с.; 22 см. (Классика и современность, Математика) . ? Библиогр.: с. 705-782 . ? Имен., предм. указ.: с. 783-805.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- Спб: Лань,2013-432 с.
<http://e.lanbook.com/view/book/30198/>

7.2. Дополнительная литература:

1. Наймарк М. А. Теория представлений групп. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 576 с
<http://e.lanbook.com/view/book/2751/>
2. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Ч. Кэртис, И. Райнер ; Пер. с англ. Б. Н. Гарштейна [и др.]; Под ред. С. Д. Бермана . Москва : Наука, 1969 . 668 с.
3. Компактные группы Ли и их представления. 2-е изд., доп. М.: МЦНМО, 2007. 552 с.
<http://e.lanbook.com/view/book/9335/page2/>
4. Сборник задач по алгебре / [И. В. Аржанцев и др.] ; под ред. А. И. Кострикина . [Новое изд., испр.] . Москва : Изд-во МЦНМО, 2009 . 403 с. ; 22 . Авт. указаны на обороте тит. л. библиогр.: с. 8-9 . ISBN 978-5-94057-413-2 ((в пер.)) , 1000.

7.3. Интернет-ресурсы:

- Винберг Э.Б. Курс алгебры - <https://e.lanbook.com/reader/book/56396/#>
- Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры. - <https://e.lanbook.com/reader/book/59284/#1>
- Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - <https://e.lanbook.com/reader/book/30198/#1>
- Курош А.Г. Теория групп. - <https://e.lanbook.com/reader/book/59755/#1>
- Тронин С.Н. Лекции по алгебре. Вып.3. - http://kpfu.ru/docs/F1878089969/ALG_3.pdf

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Теория представлений" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

проектор

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.04.01 "Математика" и магистерской программе Алгебра .

Автор(ы):

Скрябин С.М. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Абызов А.Н. _____

"__" _____ 201__ г.