

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по образовательной деятельности КФУ  
проф. Таюрский Д.А.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## **Программа дисциплины**

Конечномерные векторные пространства

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) ассистент, к.н. Новиков А.А. (Кафедра математического анализа, отделение математики), A.Hobukob@gmail.com

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-3	способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе
ОПК-4	способностью находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем
ПК-3	способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата
ПК-6	способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженной в терминах предметной области изучавшегося явления
ПК-7	способностью использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, в экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен демонстрировать способность и готовность:

Решать поставленные задачи в рамках обработки двумерных массивов числовых данных с помощью методов разложения соответствующей

матрицы. Находить методы обработки числовых массивов, соответствующие его целям. Интерпретировать полученные результаты обработки двумерных массивов.

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.В.ДВ.6 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 01.03.01 "Математика (Общий профиль)" и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе в 5 семестре.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) на 108 часа(ов).

Контактная работа - 36 часа(ов), в том числе лекции - 18 часа(ов), практические занятия - 18 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 36 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 36 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 5 семестре.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Размерность векторного					

пространства

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
2.	Тема 2. Топологии в конечномерных пространствах	5	2	1	0	2
3.	Тема 3. Унитарные пространства	5	2	1	0	4
4.	Тема 4. Операторы в унитарном пространстве	5	2	1	0	4
5.	Тема 5. Спектр оператора и его норма	5	2	4	0	4
6.	Тема 6. Проекторы	5	2	1	0	4
7.	Тема 7. Функциональное исчисление для операторов	5	1	2	0	4
8.	Тема 8. Полярное разложение оператора	5	1	2	0	4
9.	Тема 9. След и некоммутативное интегрирование	5	2	1	0	4
10.	Тема 10. Сингулярное разложение и нормы Ки Фана	5	2	4	0	4
	Итого		18	18	0	36

## 4.2 Содержание дисциплины (модуля)

### Тема 1. Размерность векторного пространства

Определение векторного пространства над полем. Примеры векторных пространств. Определение линейно независимой системы векторов. Определение максимального элемента частично упорядоченного множества. Формулировка леммы Цорна. Определение базиса Гамеля.

Теорема о равносильности всех базисов Гамеля векторного пространства..

### Тема 2. Топологии в конечномерных пространствах

Определение топологического векторного пространства. Определение уравновешенного множества. Лемма о том, что в топологическом векторном пространстве  $X$  каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля. Эквивалентность замкнутости ядра функционала, его непрерывности, неплотности ядра в векторном пространстве и ограниченности функционала в некоторой окрестности нуля. Теорема о гомеоморфизме всех конечномерных пространств данной размерности.

### Тема 3. Унитарные пространства

Определение скалярного произведения. Определение евклидова и унитарного пространства.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Определение ортогональных векторов. Определение ортогональной системы векторов. Определение ортонормированной системы векторов. Определение ортогонального дополнения множества. Теорема о проекции вектора на подпространство.

### Тема 4. Операторы в унитарном пространстве

Определение линейного оператора. Представление линейного оператора матрицей. Разница между линейным оператором и матрицей. Сопряженный оператор. Теорема о разложении унитарного пространства в прямую сумму ядра оператора и образа сопряженного ему оператора. Самосопряженные (эрмитовы) операторы. Выделение "вещественной" и "мнимой" части оператора. Определение полуторалинейной формы.

Поляризаационное тождество.

### Тема 5. Спектр оператора и его норма

Определение собственного значения оператора. Определение спектра оператора. Теорема о том, что спектр оператора  $AB$  и спектр оператора  $BA$  совпадают с точностью до нуля. Совпадение кратности собственных значений операторов  $AB$  и  $BA$ . Определение нормы линейного оператора. Определение ассоциативной алгебры над полем комплексных чисел. Определение банаховой алгебры. Частный случай теоремы Гельфанда-Мазура для конечномерных ассоциативных банаховых алгебр.

### Тема 6. Проекторы

Определение проектора на подпространство. Алгебраическое определение проектора как самосопряженного идемпотента. Доказательство эквивалентности определений. Определение ортогональных проекторов. Коммутативность проекторов как критерий того, что их произведение является проектором. Определение изоклинных проекторов.

### **Тема 7. Функциональное исчисление для операторов**

Функциональное исчисление оператора для функции голоморфной на спектре. Экспонента, синус, косинус и гиперболические функции от оператора. Экспонента, синус, косинус и гиперболические функции от проектора. Функциональное исчисление для функции  $n$ -раз дифференцируемой на спектре. Функциональное исчисление для функции непрерывной на спектре. Модуль оператора.

### **Тема 8. Полярное разложение оператора**

Определение положительного оператора. Определение частичного порядка на операторах. Норма полуторалинейной формы как норма соответствующего оператора. Критерий положительности оператора. Полярное разложение обратимого оператора. Определение частичной изометрии в банаховых пространствах. Общая теорема о полярном разложении.

### **Тема 9. След и некоммутативное интегрирование**

Определение канонического следа оператора. Свойства канонического следа. Теорема типа Радона-Никодима. Скалярное произведение матриц. Неравенство треугольника и Коши-Буняковского-Шварца. Определение норм Шаттена-фон-Неймана. Некоммутативное интегрирование матриц. Неравенства Гельдера и Миньковского.

### **Тема 10. Сингулярное разложение и нормы Ки Фана**

Определение сингулярных векторов. Определение сингулярного значения.

Определение сингулярного разложения. Связь сингулярного разложения и разложения в жорданову нормальную форму. Теорема о существовании сингулярного разложения.

Определение псевдообратной матрицы. Определение нормы Ци Фаня ( $\| \cdot \|_F$ , Ky Fan).

## **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301)

Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-996ин/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений"

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

## **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

## **7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,5 экземпляра (для обучающихся по ФГОС 3++ - не менее 0,25 экземпляра) каждого из изданий основной литературы и не менее 0,25 экземпляра дополнительной литературы на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки КФУ.

### 8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

MachineLearning.ru - <http://www.machinelearning.ru/wiki/>

WolframAlpha по-русски - <http://www.wolframalpha-ru.com/>

Матричный анализ и линейная алгебра - <http://www.inm.ras.ru/vtm/lection/all.pdf>

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Рекомендуется помимо непосредственно материала разбираемого на лекциях также смотреть различные источники такие как: классические учебники, монографии, статьи. Также по некоторым темам есть исчерпывающее описание на различных интернет-ресурсах. Некоторые задания, помеченные звездочкой имеют доказательства в общем виде для операторных алгебр, однако на данный момент неизвестны более простые методы доказательства.
практические занятия	Рекомендуется использовать системы компьютерной алгебры и системы символьных вычислений. Составителем программы подразумевается использование бесплатной системы "Sage". Также в некоторых ситуациях можно использовать интернет-сервис Wolfram Alpha или, в случае, если учащимся доступна лицензия, Wolfram Mathematica.
самостоятельная работа	Рекомендуется помимо непосредственно материала разбираемого на лекциях также смотреть различные источники такие как: классические учебники, монографии, статьи. Также по некоторым темам есть исчерпывающее описание на различных интернет-ресурсах. Некоторые задания, помеченные звездочкой имеют доказательства в общем виде для операторных алгебр, однако на данный момент неизвестны более простые методы доказательства. Рекомендуется использовать системы компьютерной алгебры и системы символьных вычислений. Составителем программы подразумевается использование бесплатной системы "Sage". Также в некоторых ситуациях можно использовать интернет-сервис Wolfram Alpha или, в случае, если учащимся доступна лицензия, Wolfram Mathematica.
экзамен	Экзамен должен проходить в письменном виде. Можно пользоваться любыми материалами, однако помимо вычислительной части решения, необходимо четко формулировать как вы использовали те или иные теоремы, как именно использовали вычислительные методы. Важно также возвращать ответ в той форме, в которой был задан вопрос.

### 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

### **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине (модулю) включает в себя следующие компоненты:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья) и оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КФУ.

Учебные аудитории для контактной работы с преподавателем, укомплектованные специализированной мебелью (столы и стулья).

Компьютер и принтер для распечатки раздаточных материалов.

Мультимедийная аудитория.

Специализированная лаборатория.

Специализированная лаборатория.

Специализированная лаборатория.

Специализированная лаборатория.

### **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;
- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;
- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;
- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;
- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;
- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;
- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:
- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;
- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;
- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки "Общий профиль".

**Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

**Основная литература:**

Линейная алгебра, Ильин, Владимир Александрович;Позняк, Эдуард Генрихович, 2010г.

Вычислительная линейная алгебра, Вержбицкий, Валентин Михайлович, 2009г.

Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Карчевский, Евгений Михайлович;Карчевский, Михаил Миронович, 2011г.

**Дополнительная литература:**

Конспект лекций по математическому анализу, Шерстнев, Анатолий Николаевич, 2005г.

Линейная алгебра:компьютерный практикум, Бубнов, Владимир Алексеевич;Толстова, Г.С.;Клемешова, О.Е., 2005г.

Линейная алгебра и геометрия, Кострикин, Алексей Иванович;Манин, Ю.И., 2005г.

Линейная алгебра, Ильин, Владимир Александрович;Позняк, Эдуард Генрихович, 2006г.

Матричный анализ и линейная алгебра, Тыртышников, Евгений Евгеньевич, 2007г.

Линейная алгебра, Бубнов, Владимир Алексеевич;Толстова, Галина Семеновна;Клемешова,

Ольга Евгеньевна, 2012г.

Вычислительная линейная алгебра, Вержбицкий, Валентин Михайлович, 2009г.

Аналитическая геометрия и линейная алгебра, Гусак, Алексей Адамович, 2011г.

Приложение 3  
к рабочей программе дисциплины (модуля)  
Б1.В.ДВ.6 Конечномерные векторные пространства

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2016

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Операционная система Microsoft Windows 7 Профессиональная или Windows XP (Volume License)

Пакет офисного программного обеспечения Microsoft Office 365 или Microsoft Office Professional plus 2010

Браузер Mozilla Firefox

Браузер Google Chrome

Adobe Reader XI или Adobe Acrobat Reader DC

Kaspersky Endpoint Security для Windows