

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Конечномерные векторные пространства Б1.В.ДВ.6

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Новиков А.А.

**Рецензент(ы):**

Насыров С.Р.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Насыров С. Р.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от "\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2018

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) ассистент, к.н. Новиков А.А. Кафедра математического анализа отделение математики , A.Nobukob@gmail.com

### 1. Цели освоения дисциплины

Программа курса 'Конечномерные векторные пространства' призвана расширить знания студентов в области линейной алгебры и теории операторов

по сравнению со стандартным курсом алгебры. Целью является освоение основных понятий некоммутативного функционального анализа

с точки зрения конечномерных векторных пространств.

### 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.6 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 5 семестр.

Для освоения курса 'Конечномерные векторные пространства' необходимы сведения и навыки из дисциплины Б.10 Алгебра, а именно: вычислительные навыки в арифметических операциях над матрицами и комплексными числами, представление о билинейных и эрмитовых (полуторалинейных) формах, линейно-независимых системах, векторных базисах, унитарных (ортогональных) операторах, понятии ранга матрицы, скалярном произведении; В.ОД.1 Компьютерные технологии: общие навыки программирования; а также из Б.9 Математический анализ: понятия о сходимости рядов, понятие о рядах Тейлора.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-3 (профессиональные компетенции)	способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе
ОПК-4 (профессиональные компетенции)	способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем.
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата
ПК-6 (профессиональные компетенции)	способность передавать результаты проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучаемого явления
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способность использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, в экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний

В результате освоения дисциплины студент:

4. должен демонстрировать способность и готовность:

Решать поставленные задачи в рамках обработки двумерных массивов числовых данных с помощью методов разложения соответствующей матрицы. Находить методы обработки числовых массивов, соответствующие его целям. Интерпретировать полученные результаты обработки двумерных массивов.

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 5 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Размерность векторного пространства	5		2	1	0	
2.	Тема 2. Топологии в конечномерных пространствах	5		2	1	0	
3.	Тема 3. Унитарные пространства	5		2	1	0	
4.	Тема 4. Операторы в унитарном пространстве	5		2	1	0	
5.	Тема 5. Спектр оператора и его норма	5		2	4	0	
6.	Тема 6. Проекторы	5		2	1	0	
7.	Тема 7. Функциональное исчисление для операторов	5		1	2	0	
8.	Тема 8. Полярное разложение оператора	5		1	2	0	
9.	Тема 9. След и некоммутативное интегрирование	5		2	1	0	
10.	Тема 10. Сингулярное разложение и нормы Ки Фана	5		2	4	0	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	Экзамен
	Итого			18	18	0	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Размерность векторного пространства

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Определение векторного пространства над полем. Примеры векторных пространств. Определение линейно независимой системы векторов. Определение максимального элемента частично упорядоченного множества. Формулировка леммы Цорна. Определение базиса Гамеля. Предложение о равномощности базисов Гамеля.

#### **практическое занятие (1 часа(ов)):**

Нахождение мощности базисов Гамеля различных пространств.

### Тема 2. Топологии в конечномерных пространствах

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Определение топологического векторного пространства. Определение уравновешенного множества. Лемма о том, что в топологическом векторном пространстве  $X$  каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля. Эквивалентность замкнутости ядра функционала, его непрерывности, неплотности ядра в векторном пространстве и ограниченности функционала в некоторой окрестности нуля. Теорема о гомеоморфизме всех конечномерных пространств данной размерности.

#### **практическое занятие (1 часа(ов)):**

Доказательство эквивалентности сходимости по норме поточечной сходимости в конечномерных пространствах.

### Тема 3. Унитарные пространства

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Определение скалярного произведения. Определение евклидова и унитарного пространства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Определение ортогональных векторов. Определение ортогональной системы векторов. Определение ортонормированной системы векторов. Определение ортогонального дополнения множества. Теорема о проекции вектора на подпространство.

#### **практическое занятие (1 часа(ов)):**

Доказательство непрерывности скалярного произведения. Доказательство равенства параллелограмма. Доказательство теоремы Пифагора. Нахождение ортогональных дополнений множеств.

### Тема 4. Операторы в унитарном пространстве

#### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Определение линейного оператора. Представление линейного оператора матрицей. Разница между линейным оператором и матрицей. Сопряженный оператор. Теорема о разложении унитарного пространства в прямую сумму ядра оператора и образа сопряженного ему оператора. Самосопряженные (эрмитовы) операторы. Выделение "вещественной" и "мнимой" части оператора. Определение полуторалинейной формы. Поляризационное тождество.

#### **практическое занятие (1 часа(ов)):**

Упражнения на исчисление сопряженных операторов. Дважды сопряженный оператор. Сопряжение суммы операторов. Сопряжение оператора умноженного на число. Представление операции сопряжения в виде операции транспонирования и комплексного сопряжения. Доказательство существования взаимнооднозначного соответствия между полуторалинейными формами и операторами.

### **Тема 5. Спектр оператора и его норма**

#### ***лекционное занятие (2 часа(ов)):***

Определение собственного значения оператора. Определение спектра оператора. Теорема о том, что спектр оператора  $AB$  и спектр оператора  $BA$  совпадают с точностью до нуля. Совпадение кратности собственных значений операторов  $AB$  и  $BA$ . Определение нормы линейного оператора. Определение ассоциативной алгебры над полем комплексных чисел. Определение банаховой алгебры. Частный случай теоремы Гельфанда-Мазура для конечномерных ассоциативных банаховых алгебр.

#### ***практическое занятие (4 часа(ов)):***

Доказательство совпадения спектра оператора с множеством его собственных значений. Доказательство, что собственные значения являются корнями характеристического многочлена. Доказательство равенств и неравенств относительно нормы оператора.

### **Тема 6. Проекторы**

#### ***лекционное занятие (2 часа(ов)):***

Определение проектора на подпространство. Алгебраическое определение проектора как самосопряженного идемпотента. Доказательство эквивалентности определений. Определение ортогональных проекторов. Коммутативность проекторов как критерий того, что их произведение является проектором. Определение изоклиных проекторов.

#### ***практическое занятие (1 часа(ов)):***

Доказательство упражнений по теме проекторы.

### **Тема 7. Функциональное исчисление для операторов**

#### ***лекционное занятие (1 часа(ов)):***

Функциональное исчисление оператора для функции голоморфной на спектре. Функциональное исчисление для функции непрерывной на спектре. Модуль оператора.

#### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Исчисление значений различных функций на конкретных операторах.

### **Тема 8. Полярное разложение оператора**

#### ***лекционное занятие (1 часа(ов)):***

Определение положительного оператора. Определение частичного порядка на операторах. Норма полуторалинейной формы как норма соответствующего оператора. Критерий положительности оператора. Полярное разложение обратимого оператора. Определение частичной изометрии. Общая теорема о полярном разложении.

#### ***практическое занятие (2 часа(ов)):***

Нахождение полярных разложений различных матриц.

### **Тема 9. След и некоммутативное интегрирование**

#### ***лекционное занятие (2 часа(ов)):***

Определение канонического следа оператора. Скалярное произведение матриц. Неравенство треугольника и Коши-Буняковского-Шварца. Определение норм Шаттена-фон-Неймана. Неравенства Гельдера и Миньковского.

#### ***практическое занятие (1 часа(ов)):***

Доказательство унитарной инвариантности следа.

### **Тема 10. Сингулярное разложение и нормы Ки Фана**

#### ***лекционное занятие (2 часа(ов)):***

Определение сингулярных векторов. Определение сингулярного значения. Определение сингулярного разложения. Теорема о существовании сингулярного разложения. Определение псевдообратной матрицы. Определение нормы Ки Фана.

**практическое занятие (4 часа(ов)):**

Доказательство неравенств для норм Ки-Фана, вычисление сингулярных разложений.

**4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Размерность векторного пространства	5		Доказательство несчетности базиса пространства последовательностей.	1	проверка письменного отчета
				Доказательство эквивалентности аксиомы выбора и леммы Цорна.	1	проверка конспектов источников, монографий и статей;
2.	Тема 2. Топологии в конечномерных пространствах	5		Доказательство эквивалентности всех норм в конечномерных пространствах	2	проверка письменного отчета
3.	Тема 3. Унитарные пространства	5		Доказательство корректности определения 2-нормы.	1	проверка письменного отчета
				Доказательство теоремы о разложении унитарного пространства в прямую сумму его подпространства и орт	1	проверка конспектов источников, монографий и статей;
				Доказательство того, что интеграл от произведения функции $f$ и функции комплексно сопряженной функции	1	проверка письменного отчета
				Нахождение ортогонального дополнения множества	1	проверка письменного отчета
4.	Тема 4. Операторы в унитарном пространстве	5		Представление операторов в виде матриц	4	проверка письменного отчета

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
5.	Тема 5. Спектр оператора и его норма	5		Реализация алгоритма QR приближенного нахождения собственных значений матрицы Хессенберга на одном и	2	проверка письменного отчета
				Реализация метода преобразований Хаусхолдера для приведения матрицы общего вида к матрице Хессенберг	2	проверка письменного отчета
6.	Тема 6. Проекторы	5		Нахождение всех изоклинных проекторов для заданного проектора и заданного угла тета.	2	проверка письменного отчета
				Нахождение общего вида матрицы проектора в двумерном пространстве.	2	проверка письменного отчета
7.	Тема 7. Функциональное исчисление для операторов	5		Реализация алгоритма преобразования матрицы к Жордановой нормальной форме, а также нахождения обратн	2	проверка письменного отчета
				Реализация алгоритма функционального исчисления Жордановой нормальной формы матрицы на одном из язык	2	проверка письменного отчета



N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
8.	Тема 8. Полярное разложение оператора	5		Реализация алгоритма полярного разложения матрицы на одном из языков программирования: C++, C#, Java	4	проверка письменного отчета
9.	Тема 9. След и некоммутативное интегрирование	5		Нахождение примера операторов A и B таких, что для их модулей не выполняется неравенства треугольник	4	проверка письменного отчета
10.	Тема 10. Сингулярное разложение и нормы Ки Фана	5		Реализация алгоритма нахождения k-нормы Ки-Фана на одном из языков программирования: C++, C#, Java,	2	проверка письменного отчета
				Реализация алгоритма сингулярного разложения матрицы на одном из языков программирования: C++, C#, J	2	проверка письменного отчета
	Итого				36	

### 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

В течение семестра проводится деловая игра по созданию программного обеспечения и сопроводительной документации.

Также решаются кейсы по интерпретации результатов обработки конкретных двумерных массивов.

### 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

#### Тема 1. Размерность векторного пространства

проверка конспектов источников, монографий и статей; , примерные вопросы:

написание реферата

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

## **Тема 2. Топологии в конечномерных пространствах**

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

## **Тема 3. Унитарные пространства**

проверка конспектов источников, монографий и статей; , примерные вопросы:

написание реферата

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

## **Тема 4. Операторы в унитарном пространстве**

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

## **Тема 5. Спектр оператора и его норма**

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка корректности работы программы, а также написание сопроводительной документации

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка корректности работы программы, а также написание сопроводительной документации

## **Тема 6. Проекторы**

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

## **Тема 7. Функциональное исчисление для операторов**

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка корректности работы программы, а также написание сопроводительной документации

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка корректности работы программы, а также написание сопроводительной документации

## **Тема 8. Полярное разложение оператора**

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка корректности работы программы, а также написание сопроводительной документации

## **Тема 9. След и некоммутативное интегрирование**

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка письменного домашнего задания

## **Тема 10. Сингулярное разложение и нормы Ки Фана**

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка корректности работы программы, а также написание сопроводительной документации

проверка письменного отчета , примерные вопросы:

проверка корректности работы программы, а также написание сопроводительной документации

### **Итоговая форма контроля**

экзамен (в 5 семестре)

Примерные вопросы к экзамену:

1. Докажите, что размерность пространства  $R$  над полем  $Q$  бесконечна.
2. Докажите, что сходимость в топологии нормы эквивалентна поточечной сходимости.
3. Докажите, что неравенство треугольника для 2-нормы обращается равенством тогда и только тогда, когда  $x = \lambda y$ , где  $\lambda$  - положительное вещественное число.
4. Докажите, что всякий линейный оператор, действующий из конечномерного пространства в конечномерное пространство непрерывен.
5. Докажите, что для самосопряженного оператора  $A$  его операторная норма совпадает с его спектральным радиусом.
6. Докажите, что для проектора  $P$  его ядро равно образу  $1 - P$ .
7. Пусть  $A$  - самосопряженный оператор. Покажите, что  $\exp(iA)$  - унитарный оператор.
8. Докажите, что самоспряженный оператор  $A$  положителен тогда и только тогда, когда  $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$ .
9. Докажите, что если для любого унитарного оператора  $U$  и любого линейного оператора  $A \in V(H)$  линейный функционал  $\varphi$  удовлетворяет равенству  $\varphi(UAU^*) = \varphi(A)$ , то  $\varphi = \lambda \text{Tr}$ .
10. Пусть  $A : H_1 \rightarrow H_2$  - сюръективный линейный оператор ( $\dim H_2 < \dim H_1$ ). Докажите, что тогда  $AA^*$  обратим, и  $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ .

#### **7.1. Основная литература:**

Линейная алгебра, Ильин, Владимир Александрович;Позняк, Эдуард Генрихович, 2010г.

Вычислительная линейная алгебра, Вержбицкий, Валентин Михайлович, 2009г.

Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Карчевский, Евгений Михайлович;Карчевский, Михаил Миронович, 2011г.

Аналитическая геометрия и линейная алгебра, Гусак, Алексей Адамович, 2011г.

#### **7.2. Дополнительная литература:**

Конспект лекций по математическому анализу, Шерстнев, Анатолий Николаевич, 2005г.

Функциональный анализ, Луговая, Галина Дмитриевна;Шерстнев, Анатолий Николаевич, 2008г.

Линейная алгебра:компьютерный практикум, Бубнов, Владимир Алексеевич;Толстова, Г.С.;Клемешова, О.Е., 2005г.

Линейная алгебра и геометрия, Кострикин, Алексей Иванович;Манин, Ю.И., 2005г.

Линейная алгебра, Ильин, Владимир Александрович;Позняк, Эдуард Генрихович, 2006г.

Матричный анализ и линейная алгебра, Тыртышников, Евгений Евгеньевич, 2007г.

Линейная алгебра, Бубнов, Владимир Алексеевич;Толстова, Галина Семеновна;Клемешова, Ольга Евгеньевна, 2012г.

Вычислительная линейная алгебра, Вержбицкий, Валентин Михайлович, 2009г.

Аналитическая геометрия и линейная алгебра, Гусак, Алексей Адамович, 2011г.

#### **7.3. Интернет-ресурсы:**

MachineLearning.ru - <http://www.machinelearning.ru/wiki/>

Stepik - <https://stepik.org>

WolframAlpha по-русски - <http://www.wolframalpha-ru.com/>

Матричный анализ и линейная алгебра - <http://www.inm.ras.ru/vtm/lecture/all.pdf>

Хабрахабр - <https://habrahabr.ru/>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Конечномерные векторные пространства" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

на некоторых занятиях необходим проектор

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):

Новиков А.А. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Насыров С.Р. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.