

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор
по образовательной деятельности КФУ
Проф. Таюрский Д.А.

_____ 20__ г.

Программа дисциплины

Топологические векторные пространства Б1.В.ДВ.7

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Новиков А.А.

Рецензент(ы):

Насыров С.Р.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Насыров С. Р.

Протокол заседания кафедры No _____ от "_____" _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No _____ от "_____" _____ 201__ г

Регистрационный No

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) ассистент, к.н. Новиков А.А. Кафедра математического анализа отделение математики, A.Nobukob@gmail.com

1. Цели освоения дисциплины

Программа курса 'Топологические векторные пространства' призвана рассказать студентам о продвинутых концепциях и понятиях функционального анализа. Целью курса является овладение студентами передовыми результатами в области функционального анализа.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.7 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.01 Математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 6 семестр.

Для освоения курса 'Топологические векторные пространства' необходимы сведения и навыки из дисциплины Б.10 Алгебра, а именно: вычислительные навыки в арифметических операциях над матрицами и комплексными числами, представление о билинейных и эрмитовых (полуторалинейных) формах, линейно-независимых системах, векторных базисах, унитарных (ортогональных) операторах, скалярном произведении, понятие группы и фактор-группы; Б.9 Математический анализ: понятия сходимости, определенного интеграла и теоремы Коши. Кроме того, необходимы понятия из Б.16 Функциональный анализ: норма, нормированное пространство, полнота, мера, сходимость по мере, пространства суммируемых функций.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-3 (профессиональные компетенции)	способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе
ОПК-4 (профессиональные компетенции)	способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата
ПК-6 (профессиональные компетенции)	способность передавать результаты проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучаемого явления
ПК-7 (профессиональные компетенции)	способность использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, в экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний

В результате освоения дисциплины студент:

4. должен демонстрировать способность и готовность:

Студент должен демонстрировать способность и готовность к проведению научно-исследовательской работы в области функционального анализа, а также проектной работы с использованием функционального анализа.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практи- ческие занятия	Лабора- торные работы	
1.	Тема 1. Векторные пространства и базис Гамеля	6	1	2	0	0	Письменное домашнее задание Реферат
2.	Тема 2. Прямые суммы и тензорные произведения векторных пространств, фактор-пространства	6	1	2	0	0	Письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Линейные отображения и алгебраически двойственное пространство	6	2	2	2	0	Устный опрос
4.	Тема 4. Топология в терминах открытых множеств и окрестностей	6	3	2	2	0	Письменное домашнее задание Реферат
5.	Тема 5. Топологические векторные пространства. Аксиомы счетности и сепарабельность.	6	5	2	2	0	Реферат Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практи- ческие занятия	Лабораторные работы	
6.	Тема 6. Непрерывные отображения в топологических векторных пространствах. Сходимости в терминах сетей и ультрафильтров. Изоморфизмы топологических векторных пространств.	6	6	2	2	0	Письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Локально выпуклые пространства. Метризуемость и пространства Фреше.	6	8	2	3	0	Письменное домашнее задание
8.	Тема 8. Тихоновская топология, двойственность, слабая и *-слабая топологии. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу.	6	9	2	3	0	Устный опрос
9.	Тема 9. Ограниченные линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Банаховы пределы.	6	11	2	3	0	Устный опрос
10.	Тема 10. Рефлексивность. Стереотипные пространства. Топология Макки.	6	13	2	3	0	Устный опрос
11.	Тема 11. Начальная и финальная топологии. Индуктивный и проективный предел топологических векторных пространств. Пространства LB и LF.	6	14	2	3	0	Письменное домашнее задание
12.	Тема 12. Топологические векторные пространства, не являющиеся локально-выпуклыми.	6	15	2	3	0	Реферат
13.	Тема 13. Теория категорий в применении к топологическим векторным пространствам.	6	17	2	0	0	
.	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	Экзамен
	Итого			26	26	0	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Векторные пространства и базис Гамеля

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение векторного пространства, линейной оболочки множества, линейно-независимой системы векторов и базиса Гамеля. Формулировка леммы Цорна. Доказательство существования базиса Гамеля. Теорема о равносильности базисов. Примеры бесконечномерных и несчетномерных пространств.

Тема 2. Прямые суммы и тензорные произведения векторных пространств, фактор-пространства

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение прямой суммы векторных пространств и фактор-пространства. Определение свободной группы и тензорного произведения.

Тема 3. Линейные отображения и алгебраически двойственное пространство

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение линейного отображения. Определение изоморфизма векторных пространств. Алгебраически сопряженное пространство. Каноническое отображение во второе сопряженное пространство.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Свойства ядер и образов линейных отображений.

Тема 4. Топология в терминах открытых множеств и окрестностей

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Аксиомы топологии в терминах открытых множеств и в терминах окрестностей. Теорема об их эквивалентности.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Эквивалентность определений непрерывности в терминах открытых множеств и в терминах окрестностей.

Тема 5. Топологические векторные пространства. Аксиомы счетности и сепарабельность.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Согласованность топологии с векторными операциями. Критерий согласованности топологии со структурой векторного пространства в терминах окрестностей. Первая и вторая аксиомы счетности. Сепарабельность.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Доказательство того, что из второй аксиомы счетности следует первая и следует сепарабельность. Подбор примеров.

Тема 6. Непрерывные отображения в топологических векторных пространствах. Сходимости в терминах сетей и ультрафильтров. Изоморфизмы топологических векторных пространств.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Секвенциальная и обычная непрерывности. Сходимость в терминах сетей (направленностей) и ультрафильтров. Непрерывность в терминах сетей (направленностей) и ультрафильтров. Их эквивалентность обычной непрерывности. Изоморфизмы топологических векторных пространств.

практическое занятие (2 часа(ов)):

Доказательство изоморфности и неизоморфности некоторых топологических векторных пространств.

Тема 7. Локально выпуклые пространства. Метризуемость и пространства Фреше.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение выпуклости, определение полунормы, определение поглощающего множества, определение уравновешенного множества. Теорема о функционале Минковского. Непрерывность умножения на скаляр и сложения векторов в локально-выпуклом пространстве. Фактор-пространства локально выпуклого пространства. Теорема о метризуемости локально выпуклого пространства.

практическое занятие (3 часа(ов)):

Проверка метризуемости некоторых локально выпуклых пространств. Проверка эквивалентности задания топологий различными системами полунорм.

Тема 8. Тихоновская топология, двойственность, слабая и *-слабая топологии. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение тихоновского произведения топологических пространств. Сохранение свойства компактности для тихоновских произведений соответствующих топологических пространств. Скобка двойственности. Определения слабой и *-слабой топологий. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу.

практическое занятие (3 часа(ов)):

Сохранения свойств T_0 , T_1 , T_2 для тихоновских произведений соответствующих топологических пространств. Сохранение связности и линейной связности.

Тема 9. Ограниченные линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Банаховы пределы.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Взаимосвязь непрерывности и ограниченности в локально-выпуклом пространстве. Геометрическая форма теоремы Хана-Банаха. Аналитическая форма теоремы Хана-Банаха.

практическое занятие (3 часа(ов)):

Банаховы пределы, взаимоотношения с верхними и нижними пределами.

Тема 10. Рефлексивность. Стереотипные пространства. Топология Макки.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Определение рефлексивных топологических векторных пространств. Примеры. Стереотипная двойственность. Топология Макки.

практическое занятие (3 часа(ов)):

Доказательство рефлексивности некоторых пространств.

Тема 11. Начальная и финальная топологии. Индуктивный и проективный предел топологических векторных пространств. Пространства L_B и L_F .

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Начальная и финальная топологии. Индуктивные и проективные пределы топологических векторных пространств. Пространства L_B , L_F , ILH .

практическое занятие (3 часа(ов)):

Проверка непрерывности и топологических свойств множеств в пространствах L_B , L_F и ILH .

Тема 12. Топологические векторные пространства, не являющиеся локально-выпуклыми.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Пространства L_p для $0 < p < 1$. F -пространства и K -пространства. L_0 и сходимость по мере (вероятности).

практическое занятие (3 часа(ов)):

Проверка свойств непрерывных отображений в не локально выпуклых пространствах.

Тема 13. Теория категорий в применении к топологическим векторным пространствам.

лекционное занятие (2 часа(ов)):

Приложение теории категорий функциональному анализу и категории топологических векторных пространств.

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Векторные пространства и базис Гамеля	6	1	подготовка домашнего задания	3	Письменное домашнее задание

N	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
				подготовка к реферату	2	Реферат
2.	Тема 2. Прямые суммы и тензорные произведения векторных пространств, фактор-пространства	6	1	подготовка домашнего задания	4	Письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Линейные отображения и алгебраически двойственное пространство	6	2	подготовка к устному опросу	1	Устный опрос
4.	Тема 4. Топология в терминах открытых множеств и окрестностей	6	3	подготовка домашнего задания	3	Письменное домашнее задание
				подготовка к реферату	2	Реферат
5.	Тема 5. Топологические векторные пространства. Аксиомы счетности и сепарабельность.	6	5	подготовка домашнего задания	2	Письменное домашнее задание
				подготовка к реферату	3	Реферат
6.	Тема 6. Непрерывные отображения в топологических векторных пространствах. Сходимости в терминах сетей и ультрафильтров. Изоморфизмы топологических векторных пространств.	6	6	подготовка домашнего задания	4	Письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Локально выпуклые пространства. Метризуемость и пространства Фреше.	6	8	подготовка домашнего задания	4	Письменное домашнее задание

№	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
8.	Тема 8. Тихоновская топология, двойственность, слабая и *-слабая топологии. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу.	6	9	подготовка к устному опросу	1	Устный опрос
9.	Тема 9. Ограниченные линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Банаховы пределы.	6	11	подготовка к устному опросу	1	Устный опрос
10.	Тема 10. Рефлексивность. Стереотипные пространства. Топология Макки.	6	13	подготовка к устному опросу	1	Устный опрос
11.	Тема 11. Начальная и финальная топологии. Индуктивный и проективный предел топологических векторных пространств. Пространства LB и LF.	6	14	подготовка домашнего задания	4	Письменное домашнее задание
12.	Тема 12. Топологические векторные пространства, не являющиеся локально-выпуклыми.	6	15	подготовка к реферату	3	Реферат
	Итого				38	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

В процессе обучения студентами используется доступ к базам статей Scopus и Web of Science для получения наиболее актуальной информации о развитии области на данный момент.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Векторные пространства и базис Гамеля

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Определение мощности базиса пространства всех последовательностей.

Реферат , примерные вопросы:

Эквивалентность леммы Цорна и аксиомы выбора.

Тема 2. Прямые суммы и тензорные произведения векторных пространств, фактор-пространства

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Разложение пространства функций всех вещественных функций на $[-1,1]$ в прямую сумму пространства четных функций и пространства нечетных функций. Найти размерность тензорного произведения n -мерного и m -мерного пространств. Доказать равенства для тензорных произведений.

Тема 3. Линейные отображения и алгебраически двойственное пространство

Устный опрос , примерные вопросы:

Какими свойствами обладают ядро и образ линейного отображения? Приведите примеры линейных отображений на непрерывных на отрезке функциях.

Тема 4. Топология в терминах открытых множеств и окрестностей

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Построение решетки топологий на множествах $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$ и $\{a,b,c,d\}$

Реферат , примерные вопросы:

Эквивалентность сходимости в терминах ультрафильтров и в терминах направленностей.

Тема 5. Топологические векторные пространства. Аксиомы счетности и сепарабельность.

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Проверка выполнения аксиом счетности для конкретных топологических пространств.

Реферат , примерные вопросы:

Базы и предбазы топологий.

Тема 6. Непрерывные отображения в топологических векторных пространствах. Сходимости в терминах сетей и ультрафильтров. Изоморфизмы топологических векторных пространств.

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Проверка изоморфизмов некоторых топологических векторных пространств.

Тема 7. Локально выпуклые пространства. Метризуемость и пространства Фреше.

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Проверка сводимости полинормированного пространства к пространству Фреше.

Тема 8. Тихоновская топология, двойственность, слабая и *-слабая топологии. Теорема о биполяре. Теорема Банаха-Алаоглу.

Устный опрос , примерные вопросы:

Чем *-слабая топология отличается от слабой топологии? Вступает ли теорема Банаха-Алаоглу в противоречие с критерием конечномерности банахова пространства?

Тема 9. Ограниченные линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Банаховы пределы.

Устный опрос , примерные вопросы:

Что такое банахов предел?

Тема 10. Рефлексивность. Стереотипные пространства. Топология Макки.

Устный опрос , примерные вопросы:

Что такое стереотипная двойственность? Какие двойственности видов топологических векторных пространств вы знаете?

Тема 11. Начальная и финальная топологии. Индуктивный и проективный предел топологических векторных пространств. Пространства LB и LF .

Письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Доказательство принадлежности некоторых пространств классам LB и LF .

Тема 12. Топологические векторные пространства, не являющиеся локально-выпуклыми.

Реферат , примерные вопросы:

Примеры топологических векторных пространств, не являющихся локально выпуклыми.

Тема 13. Теория категорий в применении к топологическим векторным пространствам.

Итоговая форма контроля

экзамен (в 6 семестре)

Примерные вопросы к итоговой форме контроля

- 1) Докажите непрерывность линейного отображения в пространстве Фреше.
- 2) Приведите определение слабой топологии, в которой все непрерывные функционалы в двойственности $\langle E, F \rangle$ являлись бы непрерывными.
- 3) Проверьте непрерывность линейного отображения в LF -пространстве.
- 4) Проверьте сохранения свойства T_0 для тихоновского произведения топологических пространств со свойством T_0 .

7.1. Основная литература:

Функциональный анализ, Сидоров, Анатолий Михайлович, 2010г.

Элементы теории функций и функционального анализа, Колмогоров, Андрей Николаевич;Фомин, Сергей Васильевич, 2006г.

Булевы алгебры и квантовые логики, Султанбеков, Фоат Фаритович, 2007г.

1. От решеток к булевым алгебрам:Уч.пос./Ф.Ф.Султанбеков-Казань: Казанский (Приволжский)федеральный университет,2012-74с.:http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2012_000032.pdf>.
2. Конспект лекций по математическому анализу: Учебное пособие/ А.Н. Шерстнев. -Казань:2009.-374с.:http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf>.

7.2. Дополнительная литература:

Функциональный анализ, Канторович, Леонид Витальевич;Акилов, Глеб Павлович, 2004г.

Функциональный анализ, Луговая, Галина Дмитриевна;Шерстнев, Анатолий Николаевич, 2008г.

Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении, Хелемский, Александр Яковлевич, 2009г.

7.3. Интернет-ресурсы:

stackexchange - <https://math.stackexchange.com>

Вики-конспекты ИТМО -

<https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A2%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B8>

МЦНМО - <https://www.mccme.ru/>

Независимый Московский университет - <https://www.mccme.ru/ium/>

Факультет математики НИУ ВШЭ - <http://vyshka.math.ru/>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Топологические векторные пространства" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Нужен проектор.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):

Новиков А.А. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Насыров С.Р. _____

"__" _____ 201__ г.