

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности КФУ

Проф. Таюрский Д.А.



_____ 20__ г.

подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины
Функциональный анализ Б1.Б.16

Направление подготовки: 01.03.01 - Математика

Профиль подготовки: Общий профиль

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Гумеров Р.Н.

Рецензент(ы):

Луговая Г.Д., Гарифьянов Фархат Нургаязович

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Насыров С. Р.

Протокол заседания кафедры No _____ от "_____" _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :

Протокол заседания УМК No _____ от "_____" _____ 201__ г

Регистрационный No 81724517

Казань
2017

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Гумеров Р.Н. Кафедра математического анализа отделение математики , Renat.Gumerov@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Функциональный анализ" являются: получение базовых знаний по функциональному анализу: меры на системах множеств, продолжение меры с полукольца на кольцо, измеримые по Лебегу множества, мера Лебега, множества лебеговой меры нуль, мера Лебега-Стилтьеса, описание мер на борелевской алгебре числовой прямой, абсолютно непрерывные и сингулярные меры, измеримые функции, различные типы сходимости, конструкция интеграла Лебега и его свойства, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, заряды, меры в произведениях множеств, метрические пространства, пополнение метрического пространства, теоремы о вложенных шарах и Бэра, принцип сжимающих отображений и его применения, вполне ограниченные, компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах, непрерывные функции на компактных пространствах, нормированные и банаховы пространства, линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха), предгильбертовы и гильбертовы пространства, их изоморфизмы, теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, билинейные формы и их связь с операторами, сопряженные, самосопряженные, унитарные операторы, алгебра операторов в гильбертовом пространстве, ортопроекторы, конечномерные и компактные операторы, резольвента и спектр ограниченного оператора, строение спектра компактного оператора (теорема Рисса-Шаудера), спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора, приложения к уравнениям Фредгольма (теоремы Фредгольма), интегральные уравнения с симметрическим ядром, производные Гато и Фреше отображения, теорема о неявной функции и ее применения, локальный экстремум функционала и условия его существования, понятие интеграла от вектор-функции со значениями в банаховом пространстве, формулы Лагранжа и Тейлора. При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения задач, связанных с приложениями методов функционального анализа в механике, физике и в других областях естествознания.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.Б.16 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.01 Математика и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 3 курсе, 5, 6 семестры.

Дисциплина входит в базовую часть профессионального цикла.

Получаемые знания необходимы для понимания и освоения курсов теории вероятностей, математической статистики, методов оптимизации, а также профильных дисциплин направления математики.

Слушатели должны владеть знаниями по дисциплинам математический анализ, алгебра.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1 (профессиональные компетенции)	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности отовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности
ОПК-3 (профессиональные компетенции)	способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики
ПК-3 (профессиональные компетенции)	способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата
ПК-5 (профессиональные компетенции)	способностью использовать методы математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные понятия и результаты по функциональному анализу (мера и интеграл Лебега, полные метрические и нормированные пространства, принцип сжимающих отображений, ограниченные линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа, свойства компактных операторов в гильбертовых пространствах, спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, теоремы Фредгольма, производные Гато и Фреше, теорема о неявной функции, условия существования экстремумов функционалов).

2. должен уметь:

Уметь вычислять интеграл Лебега. Уметь применять принцип сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения функциональных уравнений, систем линейных уравнений, интегральных уравнений в основных функциональных пространствах. Уметь вычислять нормы ограниченных линейных функционалов и операторов
Уметь применять теорию операторов для исследования операторных уравнений.

3. должен владеть:

методами теории меры и интеграла, линейного анализа, теории компактных операторов в гильбертовом пространстве.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

1. Знать: основные понятия и результаты по функциональному анализу (мера и интеграл Лебега, полные метрические и нормированные пространства, принцип сжимающих отображений, ограниченные линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа, свойства компактных операторов в гильбертовых пространствах, спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, теоремы Фредгольма, производные Гато и Фреше, теорема о неявной функции, условия существования экстремумов функционалов).

2. Уметь вычислять интеграл Лебега. Уметь применять принцип сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения функциональных уравнений, систем линейных уравнений, интегральных уравнений в основных функциональных пространствах. Уметь вычислять нормы ограниченных линейных функционалов и операторов

3. Владеть: методами теории меры и интеграла, линейного анализа, теории компактных операторов в гильбертовом пространстве.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных(ые) единиц(ы) 288 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 5 семестре; экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега.	5	1-9	18	0	16	Письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Полные метрические пространства. Компактность и предкомпактность. Принцип сжимающих отображений.	5	10-12	6	0	8	Письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Нормированные и банаховы пространства. Линейные операторы и функционалы. Основные принципы линейного анализа	5	13-18	10	0	10	Контрольная работа

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
4.	Тема 4. Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве	6	1-8	16	0	16	Письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора. Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.	6	9-14	12	0	14	Письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Элементы нелинейного анализа в нормированных пространствах.	6	15-17	4	0	2	Контрольная работа
	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	Зачет
	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	Экзамен
	Итого			66	0	66	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

лекционное занятие (18 часа(ов)):

Системы множеств. Полукольцо. Кольцо. Минимальное кольцо. Алгебра. Сигма-кольцо. Сигма алгебра. (2) Мера на полукольце. Сигма-аддитивная мера. Внешняя мера. (2) Измеримые по Лебегу множества. Мера Лебега (2) Измеримые функции. (2) Различные виды сходимости. Теорема Егорова. (2) Интеграл Лебега (2). Предельный переход под знаком интеграла. (2) Абсолютная непрерывность. Неравенство Чебышева. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Теорема Лузина. (2) Заряды. Теорема Радона-Никодима. Теорема Фубини. Мера Лебега-Стилтьеса. (2)

лабораторная работа (16 часа(ов)):

Операции над множествами (2) Отображения (2) Системы множеств (2) Мера на полукольце. Продолжение. (4) Мера Лебега (2) Измеримые функции (2) Интеграл Лебега (2)

Тема 2. Полные метрические пространства. Компактность и предкомпактность. Принцип сжимающих отображений.

лекционное занятие (6 часа(ов)):

Полные метрические пространства. Теоремы Бэра, о пополнении. Принцип вложенных шаров (2) Компактность и предкомпактность. Сепарабельность. (2) Принцип сжимающих отображений. Приложения (2)

лабораторная работа (8 часа(ов)):

Геометрия метрических пространств (2) Примеры пространств. Полные пространства (3) Принцип сжимающих отображений и применения (3)

Тема 3. Нормированные и банаховы пространства. Линейные операторы и функционалы. Основные принципы линейного анализа

лекционное занятие (10 часа(ов)):

Нормированные и банаховы пространства(3). Линейные операторы и функционалы.(3)
 Основные принципы линейного анализа(4)

лабораторная работа (10 часа(ов)):

Нормированные пространства(2) Банаховы пространства(2) Функционалы(2) Операторы (2)
 Приложения основных принципов(2)

Тема 4. Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве

лекционное занятие (16 часа(ов)):

Унитарные и гильбертовы пространства(4) Ограниченные линейные функционалы на гильбертовом пространстве(4) Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве(8)

лабораторная работа (16 часа(ов)):

Унитарные пространства(3) Гильбертовы пространства(3) Функционалы(2)
 Операторы.Сопряженные операторы(8)

Тема 5. Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора. Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.

лекционное занятие (12 часа(ов)):

Компактные операторы.Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора.(8) Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.(4)

лабораторная работа (14 часа(ов)):

Операторы конечного ранга. Компактные операторы. Самосопряженные операторы.(4)
 Спектр,резольвента(4) Операторные уравнения.(6)

Тема 6. Элементы нелинейного анализа в нормированных пространствах.

лекционное занятие (4 часа(ов)):

Дифференцирование в нормированных пространствах.Формулы Лагранжа и Тэйлора.(2)
 Понятие интеграла.Теорема о неявной функции и некоторые ее применения.(2)

лабораторная работа (2 часа(ов)):

Дифференциалы Гато и Фреше(2)

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега.	5	1-9	Изучение лекций и литературы, выполнение домашних заданий	28	домашнее задание
2.	Тема 2. Полные метрические пространства. Компактность и предкомпактность. Принцип сжимающих отображений.	5	10-12	Изучение лекций и литературы, выполнение домашних заданий	18	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
3.	Тема 3. Нормированные и банаховы пространства. Линейные операторы и функционалы. Основные принципы линейного анализа	5	13-18	Изучение лекций и литературы, выполнение домашних заданий	14	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	16	контрольная работа
4.	Тема 4. Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве	6	1-8	Изучение лекций и литературы, выполнение домашних заданий	22	домашнее задание
5.	Тема 5. Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора. Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.	6	9-14	Изучение лекций и литературы, выполнение домашних заданий	18	домашнее задание
6.	Тема 6. Элементы нелинейного анализа в нормированных пространствах.	6	15-17	Изучение лекций и литературы, выполнение домашних заданий	2	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
Итого					120	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

лекции, лабораторные занятия, контрольные работы, зачет и экзамен. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому лабораторному занятию. В каждом семестре проводятся контрольные работы (на лабораторных занятиях). Зачет выставляется по положительным результатам выполнения контрольных работ и самостоятельной работы в течении семестра, а также успешной сдачи теоретического материала по прилагаемой программе. К экзамену допускаются студенты, показавшие положительные результаты по текущей работе в течение семестра.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

домашнее задание , примерные вопросы:

меры на системах множеств, продолжение меры с полукольца на кольцо, измеримые по Лебегу множества, мера Лебега, множества лебеговой меры нуль, мера Лебега-Стилтьеса, описание мер на борелевской алгебре числовой прямой, абсолютно непрерывные и сингулярные меры, измеримые функции, различные типы сходимости, конструкция интеграла Лебега и его свойства, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, заряды, меры в произведениях множеств.

Тема 2. Полные метрические пространства. Компактность и предкомпактность. Принцип сжимающих отображений.

домашнее задание, примерные вопросы:

метрические пространства, пополнение метрического пространства, теоремы о вложенных шарах и Бэра, принцип сжимающих отображений и его применения, вполне ограниченные, компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах, непрерывные функции на компактных пространствах

Тема 3. Нормированные и банаховы пространства. Линейные операторы и функционалы. Основные принципы линейного анализа

домашнее задание, примерные вопросы:

норма, нормированные и банаховы пространства, линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха.

контрольная работа, примерные вопросы:

Мера и интеграл. Метрические и нормированные пространства

Тема 4. Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве

домашнее задание, примерные вопросы:

предгильбертовы и гильбертовы пространства, их изоморфизмы, теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, билинейные формы и их связь с операторами, сопряженные, самосопряженные, унитарные операторы, алгебра операторов в гильбертовом пространстве, ортопроекторы, конечномерные и компактные операторы, резольвента и спектр ограниченного оператора, строение спектра компактного оператора (теорема Рисса-Шаудера)

Тема 5. Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора. Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.

домашнее задание, примерные вопросы:

спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора, приложения к уравнениям Фредгольма (теоремы Фредгольма), интегральные уравнения с симметрическим ядром

Тема 6. Элементы нелинейного анализа в нормированных пространствах.

домашнее задание, примерные вопросы:

производные Гато и Фреше отображения, теорема о неявной функции и ее применения, локальный экстремум функционала и условия его существования, понятие интеграла от вектор-функции со значениями в банаховом пространстве, формулы Лагранжа и Тейлора. Достаточное условие локального экстремума функционалов.

контрольная работа, примерные вопросы:

Операторы в гильбертовых и банаховых пространствах

Тема . Итоговая форма контроля

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к зачету и экзамену:

все виды текущего контроля успеваемости и аттестации по итогам освоения дисциплины оцениваются по 100-балльной рейтинговой системе, принятой в КФУ. Экзамены оцениваются переводом набранных по дисциплине баллов в оценки: неудовлетворительно, посредственно, удовлетворительно, хорошо, очень хорошо, отлично. Варианты контрольных заданий и программы зачета и экзамена приведены в приложениях 1 и 2. Распределение баллов по видам контроля приведены в приложении 3.

Образцы контрольных работ.

I. Мера и интеграл

1. Отображение $f: X \rightarrow Y$ является инъекцией тогда и только тогда, когда $f^{-1}(f(A))=A$ для любого подмножества $A \subset X$.
2. Пусть задана мера на кольце. E и F - множества из этого кольца, G - их симметрическая разность. Доказать, что мера пересечения множества E с множеством G равна разности меры множества E и меры пересечения E и F .
3. Доказать измеримость функции $\text{sign}(\cos(x^2))$, заданной на вещественной оси.
4. Вычислить интеграл Лебега по интервалу $(1;2)$ от функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}(x-1)}$.

II. Метрические и нормированные пространства.

1. Доказать полноту и сепарабельность метрического пространства l_1 .
2. Используя принцип сжимающих отображений показать, что система линейных уравнений $x=0.5y+1$; $y=0.25x-2$ в вещественной плоскости имеет единственное решение и укажите приближенный метод ее решения.
3. Доказать, что функционал $f((x_k))=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k})x_k$ является непрерывным на l_1 и вычислить его норму.
4. Доказать, что оператор $A:C[0,1] \rightarrow C[0,1]:x(t) \rightarrow t^2x(0)$ ограничен и вычислить его норму.

Вопросы за 5 семестр.

- Системы множеств. Полукольцо. Кольцо. Минимальное кольцо. Алгебра.
- Меры на системах множеств. Продолжение меры с полукольца на кольцо.
- Внешняя мера.
- Измеримые по Лебегу множества.
- Мера Лебега и её свойства.
- Измеримые функции.
- Различные типы сходимости. Теорема Егорова.
- Конструкция интеграла Лебега и его свойства. Неравенство Чебышева. Сравнение с интегралом Римана.
- Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.
- Классы интегрируемых функций.
- Заряды, теоремы Хана и Радона-Никодима.
- Меры в произведениях множеств. Теорема Фубини.
- Метрические пространства. Пополнение метрического пространства.
- Теорема о вложенных шарах и теорема Бэра.
- Принцип сжимающих отображений и его применения
- Вполне ограниченные, компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах,
- Непрерывные функции на компактных пространствах.

Вопросы за 6 семестр.

- Норма. Нормированные и банаховы пространства. Пополнение. Ряды.
- Линейные операторы и функционалы. Ограниченность. Норма оператора.
- Теорема Хана-Банаха,
- Теорема Банаха-Штейнгауза
- Теорема Банаха
- Сопряженное пространство
- Унитарные и гильбертовы пространства. Элемент наилучшего приближения. Проекторы.
- Ряды Фурье
- Сепарабельные гильбертовы пространства.

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "КнигаФонд", доступ к которой предоставлен студентам. Электронно-библиотечная система "КнигаФонд" реализует легальное хранение, распространение и защиту цифрового контента учебно-методической литературы для вузов с условием обязательного соблюдения авторских и смежных прав. КнигаФонд обеспечивает широкий законный доступ к необходимым для образовательного процесса изданиям с использованием инновационных технологий и соответствует всем требованиям новых ФГОС ВПО.

функциональный анализ: учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий, доступ студентов к компьютеру с Mircsft Office.

ри необходимости занятия могут проводиться в мультимедийной аудитории 610 (корпус 2 К(П)ФУ),

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.01 "Математика" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):

Гумеров Р.Н. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Луговая Г.Д. _____

Гарифьянов Фархат Нургаязович _____

"__" _____ 201__ г.