МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по образовательной деятельности КФУ
Проф. Минзарипов Р.Г.

подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины

Функциональный анализ Б3.Б.6

Направление подготовки: 010800.62 - Механика и математическое моделирование
Профиль подготовки: Общий профиль
Квалификация выпускника: бакалавр
Форма обучения: очное
Язык обучения: русский

Автор(ы):
Гумеров Р.Н.
Рецензент(ы):
Луговая Г.Д.

СОГЛАСОВАНО:
Заведующий(ая) кафедрой: Насыров С. Р.
Протокол заседания кафедры No ___ от "____" ___________ 201__г
Учебно-методическая комиссия Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского :
Протокол заседания УМК No ____ от "____" ___________ 201__г

Регистрационный No 81721815

Казань
2014

Содержание

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. (доцент) Гумеров Р.Н. Кафедра математического анализа отделение математики , Renat.Gumerov@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Функциональный анализ" являются: получение базовых знаний по функциональному анализу: мера Лебега, продолжение меры с полукольца на сигма-алгебру, описание мер на борелевской алгебре числовой прямой, измеримые функции, сходимость почти всюду, конструкция интегала Лебега, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, интеграл Лебега-Стилтьеса, метрические пространства, пополнение метрического пространства, метод сжимающих отображений и его применения, критерий компактности метрического пространства, нормированные и банаховы пространства, линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха), гильбертовы пространства, теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, самосопряженные, унитарные операторы; ортопроекторы, компактные операторы, спектр эрмитова и унитарного оператора, строение спектра компактного оператора (теорема Рисса-Шаудера), спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, приложения к инте-гральным уравнениям Фредгольма (теоремы Фредгольма), интегральные уравнения с симметрическим ядром. При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения задач, связанных с приложениями методов функционального анализа в механике.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б3.Б.6 Профессиональный" основной образовательной программы 010800.62 Механика и математическое моделирование и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 3 курсе, 5, 6 семестры.

Дисциплина входит в базовую часть профессионального цикла.

Получаемые знания необходимы для понимания и освоения курсов теории вероятно-стей, математической статистики, методов оптимизации, а также профильных дисциплин направления механики и математического моделирования.

Слушатели должны владеть знаниями по дисциплинам математический анализ, алгебра.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОК-11 (общекультурные компетенции)	фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и готовность к использованию их в профессиональной деятельности
ОК-14 (общекультурные компетенции)	способность к анализу и синтезу
ОК-6 (общекультурные компетенции)	способность применять знания на практике
ПК-2 (профессиональные компетенции)	умение понять поставленную задачу

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК-3 (профессиональные компетенции)	умение формулировать результат
ПК-4 (профессиональные компетенции)	умение строго доказать утверждение

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные понятия и результаты по функциональному анализу (мера и интеграл Лебега, полные метрические и нормированные пространства, принцип сжимающих отображений, ограниченные линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа, свойства компактных операторов в гильбертовых пространствах, спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, приложения к интегральным уравнениям Фредгольма (теоремы Фредгольма).

2. должен уметь:

Уметь вычислять интегралы Лебега. Уметь применять метод сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения функциональных уравнений, систем линейных уравнений, интегральных уравнений в основных функциональных пространствах. Уметь вычислять нормы ограниченных линейных функционалов и операторов.

Применять к интегральным уравнениям теорию Фредгольма.

3. должен владеть:

методами теории меры и интеграла, линейного анализа, теории компактных операторов в гильбертовом пространстве.

4. должен демонстрировать способность и готовность:

1. Знать: основные понятия и результаты по функциональному анализу (мера и инте-грал Лебега, полные метрические и нормированные пространства, принцип сжимающих отображений, ограниченные линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа, свойства компактных операторов в гильбертовых пространствах, спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора, теоремы Фредгольма.

2. Уметь вычислять интеграл Лебега. Уметь применять принцип сжимающих отобра-жений для доказательства существования и единственности решения функциональных урав-нений, систем линейных уравнений, интегральных уравнений в основных функциональных пространствах. Уметь вычислять нормы ограниченных линейных функционалов и операто-ров

3. Владеть: методами теории меры и интеграла, линейного анализа, теории компакт-ных операторов в гильбертовом пространстве.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных(ые) единиц(ы) 180 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 5 семестре; экзамен в 6 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);
55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);
54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса на числовой прямой.	5	1-9	14	0	14	домашнее задание контрольная работа
2.	Тема 2. Метрические пространства. Критерий компактности. Принцип сжимающих отображений. Нормированные и банаховы пространства.	5	10-18	12	0	12	домашнее задание контрольная работа
3.	Тема 3. Линейные отображения и функционалы в нормированных и гильбертовых пространствах. Основные принципы линейного анализа.	6	1-9	10	0	10	домашнее задание контрольная работа
4.	Тема 4. Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода	6	10-17	8	0	8	домашнее задание контрольная работа
.	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	зачет
.	Тема . Итоговая форма контроля	6		0	0	0	экзамен
	Итого			44	0	44	

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса на числовой прямой.

лекционное занятие (14 часа(ов)):

Системы множеств. Минимальное кольцо. Сигма-кольцо. Сигма алгебра.(2) Мера на полукольце. Сигма-аддитивная мера. Внешняя мера.(2) Измеримые по Лебегу множества.Мера Лебега(2) Измеримые функции.(2) Различные виды сходимости. Теорема Егорова.(1) Интеграл Лебега(2). Предельный переход под знаком интеграла.(1) Абсолютная непрерывность. Неравенство Чебышева. Сравнение интегралов Римана и Лебега.Теорема Лузина.(1) Заряды.Теорема Радона-Никодима.Теорема Фубини.Мера Лебега-Стилтьеса.(1)

лабораторная работа (14 часа(ов)):

Операции над множествами(3) Отображения(3) Системы множеств(2) Мера на полукольце.Продолжение.(1) Мера Лебега(2) Измеримые функции(2) Интеграл Лебега(1)

Тема 2. Метрические пространства. Критерий компактности. Принцип сжимающих отображений. Нормированные и банаховы пространства.

лекционное занятие (12 часа(ов)):

Полные метрические пространства.Теоремы Бэра, о пополнении.Принцип вложенных шаров(3) Компактность и предкомпактность.Сепарабальность.(3) Принцип сжимающих отображений.Приложения(3)Нормированные и банаховы пространства(3)

лабораторная работа (12 часа(ов)):

Геометрия метрическихъ пространств(2) Примеры пространств.Полные пространства(3) Принцип сжимающих отображений и применения(3) Нормированные пространства(2) Банаховы пространства(2)

Тема 3. Линейные отображения и функционалы в нормированных и гильбертовых пространствах. Основные принципы линейного анализа.

лекционное занятие (10 часа(ов)):

Линейные операторы и функционалы.(2) Основные принципы линейного анализа(3) Унитарные и гильбертовы пространства(1) Ограниченные линейные функционалы на гильбертовом пространстве(2) Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве(2)

лабораторная работа (10 часа(ов)):

Операторы и функционалы в нормированных пространствах.(4) Унитарные и гильбертовы пространства(3) операторы и функционалы в гильбертовых пространствах.(3)

Тема 4. Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

лекционное занятие (8 часа(ов)):

Компактные операторы.Спектральная теорема для компактного самосопряженного оператора.(4) Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.(4)

лабораторная работа (8 часа(ов)):

Операторы конечного ранга. Компактные операторы. Самосопряженные операторы. Вычисление нормы.Спектр,резольвента(4) Уравнения с компактными операторами. Приложения теории Фредгольма(4)

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса на числовой прямой.	5	1-9	подготовка домашнего задания	18	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
2.	Тема 2. Метрические пространства. Критерий компактности. Принцип сжимающих отображений. Нормированные и банаховы пространства.	5	10-18	подготовка домашнего задания	15	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
3.	Тема 3. Линейные отображения и функционалы в нормированных и гильбертовых пространствах. Основные принципы линейного анализа.	6	1-9	подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
4.	Тема 4. Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода	6	10-17	подготовка домашнего задания	7	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
	Итого				56	

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

лекции, лабораторные занятия, контрольные работы, коллоквиум, зачёт и экзамен. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому лабораторному занятию. В каждом семестре проводятся контрольные работы (на лабораторных занятиях). Зачет выставляется по положительным результатам выполнения контрольных работ и самостоятельной работы в течении семестра, а также успешной сдачи теоретического материала по прилагаемой программе. К экзамену допускаются студенты, показавшие положительные результаты по текущей работе в течение семестра.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега-Стилтьеса на числовой прямой.

домашнее задание , примерные вопросы:

меры на системах множеств, продолжение меры с полукольца на кольцо, измеримые по Лебегу множества, мера Лебега , множества лебеговой меры нуль, мера Лебега-Стилтьеса, описание мер на борелевской алгебре числовой прямой, абсолютно непрерывные и сингулярные меры, измеримые функции, различные типы сходимости, конструкция интеграла Лебега и его свойства, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, заряды, меры в произведениях множеств.

контрольная работа , примерные вопросы:

Множества и функции. Мера и интеграл Лебега.

Тема 2. Метрические пространства. Критерий компактности. Принцип сжимающих отображений. Нормированные и банаховы пространства.

домашнее задание , примерные вопросы:

метрические пространства, пополнение метрического пространства, теоремы о вложенных шарах и Бэра, принцип сжимающих отображений и его применения, вполне ограниченные, компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах, непрерывные функции на компактных пространствах, нормированные и банаховы пространства

контрольная работа , примерные вопросы:

Метрические и нормированные пространства. Принцип сжимающих отображений.

Тема 3. Линейные отображения и функционалы в нормированных и гильбертовых пространствах. Основные принципы линейного анализа.

домашнее задание , примерные вопросы:

линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, основные принципы линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха) предгильбертовы и гильбертовы пространства, их изоморфизмы, теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, билинейные формы и их связь с операторами, сопряженные, самосопряженные, унитарные операторы, алгебра операторов в гильбертовом пространстве, ортопроекторы, конечномерные и компактные операторы, резольвента и спектр ограниченного оператора, строение спектра компактного оператора (теорема Рисса-Шаудера), спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора

контрольная работа , примерные вопросы:

Операторы и функционалы. Вычисление их характеристик.

Тема 4. Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

домашнее задание , примерные вопросы:

Уравнения с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма.

контрольная работа , примерные вопросы:

Операторные уравнения.

Тема . Итоговая форма контроля

Тема . Итоговая форма контроля

Примерные вопросы к зачету и экзамену:

все виды текущего контроля успеваемости и аттестации по итогам освоения дисциплины оцениваются по 100-балльной рейтинговой системе, принятой к КФУ. Экзамены оцениваются переводом набранных по дисциплине баллов в оценки: неудовлетворительно, посредственно, удовлетворительно, хорошо, очень хорошо, отлично. Варианты контрольных заданий и программы зачёта и экзамена приведены в приложениях 1 и 2. Распределение баллов по видам контроля приведены в приложении 3. Методические рекомендации приведены в приложении 4.

Образцы контрольных работ.

I. Мера и интеграл

1. Отображение $f:X\to Y$ является инъекцией тогда и только тогда, кода $f^{-1}(f(A))=A$ для любого подмножества $A\subset X$.

2. Пусть задана мера на кольце. E и F - множества из этого кольца, G - их симметрическая разность. Доказать, что мера пересечения множества E с множеством G равна разности меры множества E и меры пересечения E и F.

3. Доказать измеримость функции $sign(cos(x^2))$, заданной на вещественной оси.

4. Вычислить интеграл Лебега по интервалу $(1;2)$ от функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}(x-1)}.$

II. Метрические и нормированные пространства.

1. Доказать полноту и сепарабельность метрического пространства l_1.

2. Используя принцип сжимающих отображений показать, что система линейных уравнений $x=0.5y+1; y=0.25x-2$ в вещественной плоскости

имеет единственное решение и укажите приближенный метод ее решения.

3. Доказать, что функционал $f((x_k))=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k})x_k$ является непрерывным на l_1 и вычислить его норму.

4. Доказать, что оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]:x(t)\to t^2x(0)$ ограничен и вычислить его норму.

Вопросы за 5 семестр.

1.Системы множеств.

2.Меры на системах множеств.Продолжение меры с полукольца на кольцо.

3.Внешняя мера.

5.Иизмеримые по Лебегу множества.

6.Мера Лебега.

7.Измеримые функции.

8.Различные типы сходимости.

9. конструкция интеграла Лебега и его свойства

10. теоремы о предельном переходе под знаком интеграла

11, заряды,

12. меры в произведениях множеств.

13. пополнение метрического пространства,

14теоремы о вложенных шарах и Бэра,

15 принцип сжимающих отображений и его применения

16 вполне ограниченные, компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах,

17 непрерывные функции на компактных пространствах

Вопросы за 6 семестр.

1.Нормированные и банаховы пространства. Пополнение.

2. линейные операторы и функционалы.Ограниченность.Норма.

3.теорема Хана-Банаха,

4. теорема Банаха-Штейнгауза

5. теорема Банаха

6. Сопряженное пространство

7.Ряды в нормированных пространствах.

8.Унитарные и гильбертовы пространства. Элемент наилучшего приближения.Процесс ортогонализации. Основные классы операторов.

9.Ряды Фурье

10.Функционалы в гильбертовом пространстве. Алгебра ограниченных линейных операторов.

11.Сопряженный оператор.

12.Компактные операторы. Их свойства.

13.Спектр и резольвента оператора.

14.Спектральная теория для компактного самосопряженного оператора.

15.Уравнения с компактными операторами. Теоремы Фредгольма.

7.1. Основная литература:

Элементы теории функций и функционального анализа, Колмогоров, Андрей Николаевич;Фомин, Сергей Васильевич, 2006г.

1.Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - 7-е изд. - М.: Физматлит, 2009. - 572 с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206

2.Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник. - М.: Физматлит, 2009. - 312 с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2341

3.Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения. - СПб.: Лань, 2008. - 288 с. URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=126

7.2. Дополнительная литература:

Задачи и упражнения по функциональному анализу, Треногин, Владилен Александрович;Писаревский, Борис Меерович;Соболева, Татьяна Сергеевна, 2005г.

Задачи и упражнения по функциональному анализу, Антоневич, Анатолий Борисович;Князев, Павел Николаевич;Радыно, Яков Валентинович;Крейн, С. Г., 2006г.

Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.- 2-е изд.,стереотип. - Санкт-Петербург: Лань, 2011 - 304 стр. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=1542

7.3. Интернет-ресурсы:

архив учебных материалов ВШЭ - http://math.hse.ru/courses_math/bac3-11-fa

кафедра математики физ. фак-та МГУ - http://matematika.phys.msu.ru/stud_spec/127

учебные материалы мех-мата МГУ - http://www.mexmat.net/materials/6/

Функциональный анализ 3 курс Викиконспекты - http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B

электронная библиотека К(П)ФУ - http://www.ksu.ru/f5/index.php?id=7

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Функциональный анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

функциональный анализ: учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий, доступ студентов к компьютеру с Microsoft Office.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 010800.62 "Механика и математическое моделирование" и профилю подготовки Общий профиль .

Автор(ы):
Гумеров Р.Н. ____________________
"__" _________ 201 __ г.

Рецензент(ы):
Луговая Г.Д. ____________________
"__" _________ 201 __ г.