

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Основы построения метода конечных элементов Б1.В.ДВ.6

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Даутов Р.З.

**Рецензент(ы):**

Карчевский М.М.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Задворнов О. А.

Протокол заседания кафедры No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г

Регистрационный No

Казань  
2017

## **Содержание**

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Даутов Р.З. кафедра вычислительной математики отделение прикладной математики и информатики ,  
Rafail.Dautov@kpfu.ru

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины 'Метод конечных элементов' является подготовка квалифицированных специалистов в области применения метода конечных элементов для моделирования полей различной физической природы, описываемых уравнениями математической физики.

## 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ДВ.6 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 5 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам. Читается для студентов обучающихся по направлению 'Прикладная математика'. Базируется на дисциплинах 'Алгебра и геометрия', 'Математический анализ', 'Дополнительные главы математической физики'.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-2 (профессиональные компетенции)	Способность использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования
ПК-10 (профессиональные компетенции)	Готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач, способностью применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных
ПК-12 (профессиональные компетенции)	Способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальной математики
ПК-9 (профессиональные компетенции)	Способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

теоретические знания о понятиях и задачах, связанных с аппроксимацией функциональных пространств Соболева.

2. должен уметь:

понимать и применять на практике компьютерные технологии для решения различных задач линейной алгебры и уравнений задач математической физики

3. должен владеть:
- навыками самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с численным решением краевых задач математической физики методом конечных элементов.
4. должен демонстрировать способность и готовность:
- применять полученные знания и навыки в своей профессиональной деятельности

#### 4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных(ые) единиц(ы) 144 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 5 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

#### 4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

##### Тематический план дисциплины/модуля

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
3.	Тема 3. Метод Рунге. Метод Гаусса. Лемма Сеа. Метод Гаусса с возмущениями.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбле- Гильберта.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.	5		0	0	4	Письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Интерполяция в $R_n$ . Разрешимость задачи.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $S_k$	5		0	0	2	Контрольная работа Письменное домашнее задание
8.	Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевы элемент степени $m$ .	5		0	0	4	Письменное домашнее задание
9.	Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевы элементы	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
10.	Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)	5		0	0	4	Письменное домашнее задание
11.	Тема 11. Конечный элемент Бесселя класса $C_1$	5		0	0	2	Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
12.	Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам C0 и C1	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
13.	Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.	5		0	0	4	Письменное домашнее задание
14.	Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
15.	Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.	5		0	0	2	
16.	Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
17.	Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
18.	Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .	5		0	0	4	Письменное домашнее задание
19.	Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.	5		0	0	4	
20.	Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.	5		0	0	2	

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
21.	Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.	5		0	0	4	
22.	Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
23.	Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.	5		0	0	2	
24.	Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
25.	Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
26.	Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.	5		0	0	2	
27.	Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.	5		0	0	4	Контрольная работа Письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
28.	Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.	5		0	0	2	Письменное домашнее задание
.	Тема . Итоговая форма контроля	5		0	0	0	Зачет
	Итого			0	0	72	

## 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Рассмотрение двухточечной краевой задачи. Ее аппроксимация простейшими конечными элементами.

**Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Примеры вариационных задач в гильбертовом пространстве. Понятие билинейной положительно определенной формы и ассоциированного с ней линейного положительно определенного оператора. Разрешимость вариационной задачи (лемма Лакса-Мильграма)

**Тема 3. Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Различные подходы приближенного решения вариационной задачи в гильбертовом пространстве. Метод Галеркина.

**Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля- Гильберта.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Понятие слабой, или обобщенной, производной. Пространства Соболева функций, имеющих интегрируемые с квадратом обобщенные производные. Различные эквивалентные нормировки. Примеры.

**Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.**

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Понятие слабого решения краевой эллиптической задачи, основанное на понятии обобщенной производной. Корректность постановки обобщенной задачи.

**Тема 6. Интерполяция в  $R_n$  . Разрешимость задачи.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Полиномы и кусочные полиномы в  $R_n$ . Интерполяция полиномами в  $R_n$ .

**Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу  $S_k$**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Конечный элемент как множество в  $R_n$  с заданным набором узлов и полиномов. Понятие унисольвентности. Классы гладкости конечных элементов



**Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени  $m$ .**

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Семейства аффинно-эквивалентных конечных элементов, определяемых базисным, или ссылочным, конечным элементом. Примеры: прямоугольный и треугольный лагранжевые элементы степени  $m$ .

**Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Уменьшение числа узлов и базисных функций для прямоугольного лагранжевого конечного элемента.

**Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)**

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Использование производных в качестве степеней свободы конечного элемента. Пример: эрмитовый кубический конечный элемент в одномерном и двумерном случаях.

**Тема 11. Конечный элемент Белла класса  $C_1$**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Треугольный конечный элемент, использующий в качестве степеней свободы частные производные до 2-го порядка в каждой вершине - треугольник Белла с 18-ю степенями свободы.

**Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам  $C_0$  и  $C_1$**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Триангуляция области на конечные элементы классов  $C_0$  и  $C_1$ .

**Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.**

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Условие невырождения, или регулярности, семейств конечных элементов.

**Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Достаточные условия регулярности семейств триангуляций расчетной области на конечные элементы

**Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Триангуляция криволинейной области с использованием вблизи границы криволинейных конечных элементов.

**Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Пример криволинейных конечных элементов: изопараметрические конечные элементы.

**Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Ассоциированное с триангуляцией расчетной области пространство конечных элементов. Пространства лагранжевых и эрмитовых элементов треугольных конечных элементов.

**Тема 18. Аппроксимация подпространств  $H_k$ ,  $k=1,2$ .**

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Приближение кусочными полиномами функций из пространств Соболева.

**Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.**

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Оператор локальной полиномиальной интерполяции на базисном элементе. Оценка ошибки интерполяции на базисном элементе. Ошибка интерполяции для аффинно-эквивалентных элементов.

**Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Аппроксимация на криволинейных и изопараметрических элементах. Оценки ошибки.

**Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.**

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Аппроксимация конечными элементами эллиптических краевых задач в многоугольных областях и в областях с кусочно-гладкой границей. Оценки погрешности конечно-элементной аппроксимации.

**Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Применение изопараметрических конечных элементов для аппроксимации задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей. Погрешность аппроксимации

**Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Приближенное вычисление интегралов в методе конечных элементов. Квадратурные формулы для треугольных и прямоугольных элементов. Влияние численного интегрирования на погрешность приближения.

**Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Нумерация узлов и конечных элементов триангуляции. Матрица связности локальной и глобальной нумерации.

**Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Генерирование результирующей системы МКЭ. Различные алгоритмы сборки матрицы и правой части системы.

**Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Влияние главных и естественных краевых условий на вариационную постановку задачи и их учет в результирующей системе МКЭ

**Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.**

**лабораторная работа (4 часа(ов)):**

Применение различных подходов для вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для треугольных и прямоугольных конечных элементов.

**Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.**

**лабораторная работа (2 часа(ов)):**

Алгебраические аспекты метода конечных элементов. Ограниченность применения прямых методов решения систем уравнений МКЭ. Многоуровневые итерационные методы для систем МКЭ: многосеточные методы, методы декомпозиции области

#### 4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Метод Рунге. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля-Гильберта.	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
5.	Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Интерполяция в $R_n$ . Разрешимость задачи.	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $S_k$	5		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	3	контрольная работа

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
8.	Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени $m$ .	5		подготовка домашнего задания	3	письменное домашнее задание
9.	Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
10.	Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)	5		подготовка домашнего задания	3	письменное домашнее задание
11.	Тема 11. Конечный элемент Белла класса $C_1$	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
12.	Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам $C_0$ и $C_1$	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
13.	Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.	5		подготовка домашнего задания	3	письменное домашнее задание
14.	Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.	5		подготовка домашнего задания	2	письменное домашнее задание
16.	Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.	5		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
17.	Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.	5		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
18.	Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .	5		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
22.	Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.	5		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
24.	Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.	5		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
25.	Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.	5		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
27.	Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.	5		подготовка домашнего задания	4	письменное домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
28.	Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.	5		подготовка домашнего задания	6	письменное домашнее задание
	Итого				72	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лекционных занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Необходимый теоретический материал излагается на занятиях. Причем конспект, который остается у студента в результате прослушивания материала не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Дополнительно полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Введение в метод конечных элементов на примере обыкновенного уравнения второго порядка.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Двухточечную краевую задачу свести к вариационной задаче, применяя формулы интегрирования по частям.

### **Тема 2. Линейные уравнения с положительно определенным оператором в пространстве Гильберта. Лемма Лакса-Мильграма. Эквивалентность задаче на минимум квадратичного функционала.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Решить систему линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Проверить, что решение совпадает с минимумом квадратичного функционала энергии данной системы.

### **Тема 3. Метод Ритца. Метод Галеркина. Лемма Сеа. Метод Галеркина с возмущениями.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Для двухточечной краевой задачи применить метод Галеркина, используя базисы двух типов: тригонометрические полиномы и кусочно-линейные функции. Сравнить результаты.

### **Тема 4. Элементы теории пространств Соболева. Эквивалентные нормировки. Примеры. Лемма Брамбля- Гильберта.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Вычислить обобщенные производные заданных функций. Вычислить их соболевские нормы.

### **Тема 5. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Свойства форм. Корректность обобщенной задачи.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Для заданной правой части показать, что решение краевой задачи в классическом смысле не существует, а в обобщенной постановке решение существует и единственно.

### **Тема 6. Интерполяция в $R_n$ . Разрешимость задачи.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Для заданных узлов и заданных в них значениях построить интерполяционный полином.

### **Тема 7. Определение конечного элемента. Критерии принадлежности конечного элемента к классу $S_k$**

контрольная работа , примерные вопросы:

Выписать узловой базис конечного элемента лагранжевого типа в одномерном случае.

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Для конкретных прямоугольных и треугольных конечных элементов применить критерии принадлежности конечного элемента к классу  $S_k$ .

### **Тема 8. Определение базисного конечного элемента. Прямоугольный и треугольный лагранжевый элемент степени $m$ .**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Выписать узловой базис треугольного конечного элемента лагранжевого типа. Выписать узловой базис прямоугольного конечного элемента лагранжевого типа.

### **Тема 9. Неполные прямоугольные лагранжевые элементы**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Выписать базис неполного прямоугольного конечного элемента лагранжевого типа.

### **Тема 10. Эрмитов кубический элемент (одномерный, двумерный - прямоугольный и треугольный)**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:



Выписать узловой базис конечного элемента эрмитового типа в одномерном случае.

#### **Тема 11. Конечный элемент Белла класса $C1$**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Выписать узловой базис треугольного конечного элемента Белла (18 базисных функций).

#### **Тема 12. Ассоциированные конечные элементы. Критерии их принадлежности классам $C0$ и $C1$**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Для одномерных конечных элементов проверить их принадлежность классам  $C0$  и  $C1$ .

#### **Тема 13. Регулярность семейства ассоциированных конечных элементов.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Для заданного семейства одномерных конечных элементов проверить выполнение условия регулярности.

#### **Тема 14. Аффинно-эквивалентные элементы. Регулярность.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Построить аффинное отображение базисного треугольного конечного элемента в произвольный.

#### **Тема 15. Криволинейные элементы. Регулярность.**

#### **Тема 16. Изопараметрические элементы. Регулярность.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Построить отображение треугольного конечного элемента на изопараметрический.

#### **Тема 17. Пространства конечных элементов. Примеры пространств лагранжевых и эрмитовых элементов.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Построить глобальный базис пространства конечных элементов в одномерном случае.

#### **Тема 18. Аппроксимация подпространств $H_k$ , $k=1,2$ .**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Для заданной функции пространства Соболева вычислить наилучшее приближение в соболевской норме.

#### **Тема 19. Оценка погрешности интерполяции на базисном элементе. Оценка погрешности интерполяции для аффинных элементов.**

#### **Тема 20. Оценка погрешности интерполяции для криволинейных и изопараметрических элементов.**

#### **Тема 21. МКЭ для уравнений: в многоугольных областях аффинные элементы; в областях с кусочно-гладкой границей криволинейные элементы. Оценки точности.**

#### **Тема 22. МКЭ для задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, изопараметрические элементы. Оценки точности.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Составить систему уравнений МКЭ в квадратной области. Для задачи Дирихле с оператором Лапласа в квадратной области оценить необходимое число линейных конечных элементов для получения заданной точности приближенного решения

#### **Тема 23. МКЭ с численным интегрированием. Примеры квадратурных формул для треугольных и прямоугольных элементов. Разрешимость, оценка точности.**

#### **Тема 24. Форма данных для представления триангуляции в ЭВМ.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Для заданной триангуляции выписать матрицу связности

#### **Тема 25. Алгоритм сборки системы МКЭ (для однородной задачи Неймана). Пример для оператора Лапласа и линейных треугольных элементов.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Написать процедуру сборки системы МКЭ в Матлаб

#### **Тема 26. Учет главных и естественных краевых условий.**

## **Тема 27. Способ вычисления локальной матрицы жесткости и локального вектора сил для элементов различного типа.**

контрольная работа , примерные вопросы:

Для заданного дифференциального уравнения написать процедуру вычисления локальных матриц жесткости и локальных векторов сил в Матлаб.

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Получить расчетные формулы для вычисления локальных матриц жесткости и локальных векторов сил в Матлаб для линейных и квадратичных элементов.

## **Тема 28. Методы решения систем уравнений: прямые и итерационные методы для разреженных систем.**

письменное домашнее задание , примерные вопросы:

Написать программу в Матлаб решения системы МКЭ методом сопряженных градиентов

## **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету:

По данной дисциплине предусмотрено проведение зачета.

Примерные вопросы для зачета.

Постановка краевой задачи в вариационном виде. Метод Галеркина аппроксимации вариационной задачи в гильбертовом пространстве.

Основные аспекты метода Галеркина: выбор аппроксимирующего подпространства, выбор базиса, генерирование системы

линейных алгебраических уравнений, ее решение прямым или итерационным методом.

Понятие конечного элемента в одномерном, двумерном, общем случае. Триангуляция расчетной области, условие регулярности семейства триангуляций.

Пространства конечных элементов. Локальный и глобальный базис. Локальная и глобальная интерполяция, оценки погрешности интерполяции.

Аппроксимация конечными элементами функций пространств Соболева, оценки погрешности аппроксимации. Применение пространств конечных элементов

для аппроксимации краевых задач. Локальные и глобальные матрицы жесткости и вектора сил. Алгоритмы сборки систем МКЭ.

Учет существенных и естественных краевых условий в вариационной постановке задачи. Учет существенных и естественных краевых условий в системе МКЭ.

Прямые методы решения систем МКЭ: метод Гаусса, LU-разложение, метод Холецкого.

Итерационные методы решения систем МКЭ: метод сопряженных

градиентов с предобуславливанием, многосеточные методы, методы декомпозиции области.

### **7.1. Основная литература:**

1. Даутов Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов: учебное пособие для студентов высших учебных заведений,

обучающихся по специальности 'Прикладная математика и информатика' и по направлению 'Прикладная математика и информатика' /

Р. З. Даутов , М. М. Карчевский. ?Изд. 2-е, испр..?Казань: Казанский университет, 2011.?237 с.: ил.; 21.?

Библиогр.: с. 228-229 (25 назв.).?Предм. указ.: с. 234-237.?ISBN 978-5-98180-993-4.

2. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов:

[Учебное пособие]. - Казань: Казанский университет. 2012. - 240 с. (с грифом УМО).

[http://kpfu.ru/publication?p\\_id=47325](http://kpfu.ru/publication?p_id=47325).

3. Даутов Р.З. Метод Галеркина с возмущениями для задач на собственные значения.

[Учебное пособие]. - Казань, 2010. - 94 с.[http://kpfu.ru/publication?p\\_id=21045](http://kpfu.ru/publication?p_id=21045)



4. Самогин, Ю.Н. Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю.Н. Самогин, В.Е. Хроматов, В.П. Чирков. ? Электрон. дан. ? М. : Физматлит, 2012. ? 200 с. ? Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=59633](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59633) ? Загл. с экрана.
5. Киреев, В.И. Численные методы в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. ? Электрон. дан. ? СПб. : Лань, 2015. ? 448 с. ? Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=65043](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65043) ? Загл. с экрана.

## **7.2. Дополнительная литература:**

1. Стренг, Гилберт. Теория метода конечных элементов. / Г. Стренг, Дж. Фикс; под ред. Г. И. Марчука; пер. с англ. В. И. Агошкова [и др.]. ?М.: Мир, 1977.?348 с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 324-335.?Имен. указ.: с. 342-344.?Предм. указ.: с. 345-347.
2. Ильин В. П. Методы и технологии конечных элементов / В.П. Ильин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т вычисл. математики и мат. геофизики.?Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2007.?370 с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 357-361 (71 назв.).?Предм. указ.: с. 362-367.?ISBN 978-5-901548-30-1, 460.
3. Репченков В. И. Физические основы метода конечных элементов: пособие для студентов механико-математического факультета / В. И. Репченков, Ю. Е. Нагорный.?Минск: БГУ, 2009.?90, [1] с.: ил.; 20.?Библиогр.: с. 89.?ISBN 978-985-518-194-2, 100.
4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: перевод с английского / Ф. Сьярле; Под ред. Н. Н. Яненко; Пер. Б. И. Класов.?Москва: Мир, 1980.?512с.
5. Деклу Ж. Методы конечных элементов / Ж. Деклу.?Москва: Мир, 1976.?95с.

## **7.3. Интернет-ресурсы:**

Естественно-научный портал - <http://en.edu.ru/>  
Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>  
Портал образовательных математических ресурсов - <http://www.allmath.com/>  
Сайт образовательных ресурсов по математике - <http://www.exponenta.ru/>  
Сайт с учебными материалами по математике - <http://mathhelp.spb.ru>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Основы построения метода конечных элементов" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение.

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Лекционные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом или маркером.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Даутов Р.З. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рецензент(ы):

Карчевский М.М. \_\_\_\_\_

"\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.