

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Институт вычислительной математики и информационных технологий



подписано электронно-цифровой подписью

Программа дисциплины

Линейные операторы и операторные уравнения Б1.В.ДВ.21

Направление подготовки: 01.03.04 - Прикладная математика

Профиль подготовки: Математическое моделирование

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

Автор(ы):

Плещинский Н.Б.

Рецензент(ы):

Бахтиева Л.У.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий(ая) кафедрой: Плещинский Н. Б.

Протокол заседания кафедры No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК No ____ от " ____ " _____ 201__ г

Регистрационный No 9101219

Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) профессор, д.н. (профессор) Плещинский Н.Б.
Кафедра прикладной математики отделение прикладной математики и информатики ,
Nikolai.Pleshchinskii@kpfu.ru

1. Цели освоения дисциплины

В специальном курсе рассматриваются основные подходы к исследованию ряда задач математической физики - интегральных уравнений и краевых задач для уравнений с частными производными - методами современного функционального анализа. Обсуждается классическая теория интегральных уравнений Фредгольма и теория сингулярных интегральных уравнений. Излагаются основные положения теории линейных операторов в пространствах Соболева. Рассматриваются методы аппроксимации линейных операторов.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел "Б1.В.ДВ.21 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 01.03.04 Прикладная математика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 3 курсе, 5 семестр.

Дисциплина по выбору Б2.ДВ.2 "Линейные операторы и интегральные уравнения" относится к общепрофессиональному циклу дисциплин., изучается на четвертом курсе в 8 семестре. Для ее изучения требуются знания, полученные ранее в рамках дисциплин "Математический анализ", "Алгебра и геометрия". Полученные умения и готовности необходимы для успешной подготовки дипломной работы.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции | Расшифровка приобретаемой компетенции |
|---|--|
| ОК-9 | способность осознать социальную значимость своей будущей профессии, обладать высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности |
| ПК-11 (профессиональные компетенции) | способность приобретать и использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности |

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

основные положения общей теории линейных операторов и теории интегральных уравнений;

2. должен уметь:

выбирать оптимальные методы приближенного решения граничных задач и интегральных уравнений;

3. должен владеть:

техникой теоретического исследования линейных операторов и операторных уравнений;

4. должен демонстрировать способность и готовность:

умение использовать технику современного функционального анализа при исследовании картины разрешимости интегральных уравнений.

4. Структура и содержание дисциплины/ модуля

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных(ые) единиц(ы) 108 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 5 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю

Тематический план дисциплины/модуля

| N | Раздел Дисциплины/ Модуля | Семестр | Неделя семестра | Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах) | | | Текущие формы контроля |
|----|--|---------|--------------------|---|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | | | Лекции | Практи- ческие занятия | Лабора- торные работы | |
| 1. | Тема 1. Нормированные пространства | 5 | 1 | 0 | 0 | 3 | Письменное домашнее задание |
| 2. | Тема 2. Ограниченные компактные операторы | 5 | 2 | 0 | 0 | 3 | Письменное домашнее задание |
| 3. | Тема 3. Теория Рисса | 5 | 3-4 | 0 | 0 | 6 | Письменное домашнее задание |
| 4. | Тема 4. Дуальные системы и альтернатива Фредгольма | 5 | 5-6 | 0 | 0 | 6 | Контрольная работа |
| 5. | Тема 5. Регуляризация в дуальных системах | 5 | 7-8 | 0 | 0 | 6 | Письменное домашнее задание |
| 6. | Тема 6. Теория потенциала | 5 | 9-10 | 0 | 0 | 6 | Письменное домашнее задание |
| 7. | Тема 7. Сингулярные интегральные уравнения | 5 | 11-12 | 0 | 0 | 6 | Контрольная точка |
| 8. | Тема 8. Пространства Соболева | 5 | 13-14 | 0 | 0 | 6 | Письменное домашнее задание |

| N | Раздел Дисциплины/ Модуля | Семестр | Неделя семестра | Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах) | | | Текущие формы контроля |
|-----|---|---------|--------------------|---|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | | | Лекции | Практи- ческие занятия | Лабора- торные работы | |
| 9. | Тема 9. Аппроксимация вырожденными ядрами | 5 | 15-16 | 0 | 0 | 6 | Письменное домашнее задание |
| 10. | Тема 10. Квадратурные методы | 5 | 17-18 | 0 | 0 | 6 | Контрольная работа |
| . | Тема . Итоговая форма контроля | 5 | | 0 | 0 | 0 | Экзамен |
| | Итого | | | 0 | 0 | 54 | |

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Нормированные пространства

лабораторная работа (3 часа(ов)):

Сходимость и непрерывность. Полнота. Компактность. Скалярное произведение. Наилучшая аппроксимация

Тема 2. Ограниченные компактные операторы

лабораторная работа (3 часа(ов)):

Ограниченные операторы. Интегральные операторы. Ряды Неймана. Компактные операторы

Тема 3. Теория Рисса

лабораторная работа (6 часа(ов)):

Теория Рисса для компактных операторов. Спектральная теория. Интегральные уравнения Вольтера

Тема 4. Дуальные системы и альтернатива Фредгольма

лабораторная работа (6 часа(ов)):

Билинейные и полуторалинейные формы. Альтернатива Фредгольма. Краевые задачи для дифференциальных уравнений

Тема 5. Регуляризация в дуальных системах

лабораторная работа (6 часа(ов)):

Регуляризаторы. Нормальная разрешимость. Индекс

Тема 6. Теория потенциала

лабораторная работа (6 часа(ов)):

Гармонические функции. Единственность решения граничных задач. Поверхностные потенциалы. Существование решения граничных задач

Тема 7. Сингулярные интегральные уравнения

лабораторная работа (6 часа(ов)):

Непрерывность по Гельдеру. Интегральный оператор Коши. Задача Римана. Интегральное уравнение с ядром Коши. Интеграл Коши и логарифмический потенциал

Тема 8. Пространства Соболева

лабораторная работа (6 часа(ов)):

Пространства $H_r 0,2$ и $H_r(\Gamma)$. Слабые решения граничных задач

Тема 9. Аппроксимация вырожденными ядрами

лабораторная работа (6 часа(ов)):

Вырожденные операторы и вырожденные ядра. Тригонометрическая интерполяция

Тема 10. Квадратурные методы

лабораторная работа (6 часа(ов)):

Численное интегрирование. Метод механических квадратур. Слабо сингулярные ядра.

Аппроксимация в пространствах Соболева

4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)

| N | Раздел дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды самостоятельной работы студентов | Трудоемкость (в часах) | Формы контроля самостоятельной работы |
|-----|--|---------|-----------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 1. | Тема 1. Нормированные пространства | 5 | 1 | подготовка домашнего задания | 1 | домашнее задание |
| 2. | Тема 2. Ограниченные компактные операторы | 5 | 2 | подготовка домашнего задания | 1 | домашнее задание |
| 3. | Тема 3. Теория Рисса | 5 | 3-4 | подготовка домашнего задания | 2 | домашнее задание |
| 4. | Тема 4. Дуальные системы и альтернатива Фредгольма | 5 | 5-6 | подготовка к контрольной работе | 2 | контрольная работа |
| 5. | Тема 5. Регуляризация в дуальных системах | 5 | 7-8 | подготовка домашнего задания | 2 | домашнее задание |
| 6. | Тема 6. Теория потенциала | 5 | 9-10 | подготовка домашнего задания | 2 | домашнее задание |
| 7. | Тема 7. Сингулярные интегральные уравнения | 5 | 11-12 | подготовка к контрольной точке | 2 | контрольная точка |
| 8. | Тема 8. Пространства Соболева | 5 | 13-14 | подготовка домашнего задания | 2 | домашнее задание |
| 9. | Тема 9. Аппроксимация вырожденными ядрами | 5 | 15-16 | подготовка домашнего задания | 2 | домашнее задание |
| 10. | Тема 10. Квадратурные методы | 5 | 17-18 | подготовка к контрольной работе | 2 | контрольная работа |
| | Итого | | | | 18 | |

5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Предполагается использовать активные и интерактивные формы проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой.

На письменных работах планируется:

Письменная работа 1.

На письменной работе предлагается ответить на следующие вопросы (два вопроса для каждого варианта):

1. Линейная независимость элементов.
2. Левый и правый обратные операторы.
3. Пространства со скалярным произведением.
4. Ортонормированные системы элементов.
5. Процесс ортогонализации Шмидта.
6. Нормированные пространства.
7. Сходимость и непрерывность.
8. Полнота пространства.
9. Компактность множества.
10. Наилучшая аппроксимация.

Письменная работа 2.

На письменной работе предлагается ответить на следующие вопросы (два вопроса для каждого варианта):

1. Двойственность, порождаемая билинейными формами.
2. Двойственные (союзные) операторы. Пример: компактные интегральные операторы.
3. Теорема Рисса (о линейных функционалах в гильбертовом пространстве).
4. Альтернатива Фредгольма.
5. Вторая теорема Фредгольма.
6. Регуляризация линейных операторов.
7. Левый и правый регуляризаторы, их свойства.
8. Нормальная разрешимость линейного оператора и условия нормальной разрешимости.
9. Линейно независимые решения однородных союзных уравнений.
10. Индекс линейного оператора.

Письменная работа 3.

На письменной работе предлагается ответить на следующие вопросы (два вопроса для каждого варианта):

1. Гармонические функции и их свойства.
2. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.
3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.
4. Задача Неймана для уравнения Лапласа.
5. Внешние и внутренние граничные задачи.
6. Теорема Грина.
7. Принцип максимума.
8. Единственность решения граничных задач.
9. Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя.
10. Существование решения граничных задач.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Тема 1. Нормированные пространства

домашнее задание , примерные вопросы:

Линейные пространства. Линейная независимость элементов. Левый и правый обратные операторы. Пространства со скалярным произведением. Ортогональность. Ортонормированные системы элементов. Процесс ортогонализации Шмидта. Нормированные пространства. Сходимость и непрерывность. Полнота пространства. Компактность множества. Наилучшая аппроксимация.

Тема 2. Ограниченные компактные операторы

домашнее задание , примерные вопросы:

Ограниченные операторы. Норма линейного оператора. Интегральные операторы с непрерывным ядром . Итерированные операторы. Ряды Неймана. Условие существования и единственности решения интегрального уравнения Фредгольма. Компактные операторы. Необходимое и достаточное условие компактности оператора. Условие компактности тождественного оператора.

Тема 3. Теория Рисса

домашнее задание , примерные вопросы:

Операторные уравнения второго рода. Теория Рисса для компактных операторов. Первая теорема Рисса о пространстве нулей компактного оператора. Вторая теорема Рисса. Третья теорема Рисса (о числе Рисса). Число линейно независимых решений однородного уравнения и условия разрешимости неоднородного уравнения. Оператор проектирования и его свойства. Спектральная теория для компактных операторов. Интегральные уравнения Вольтера, существование и единственность решений.

Тема 4. Дуальные системы и альтернатива Фредгольма

контрольная работа , примерные вопросы:

Двойственность, порождаемая билинейными формами. Двойственные (союзные) операторы. Пример: компактные интегральные операторы. Двойственность, порождаемая полуторалинейными формами. Теорема Рисса (о линейных функционалах в гильбертовом пространстве). Альтернатива Фредгольма. Вторая теорема Фредгольма. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений.

Тема 5. Регуляризация в дуальных системах

домашнее задание , примерные вопросы:

Регуляризация линейных операторов. Левый и правый регуляризаторы, их свойства. Нормальная разрешимость линейного оператора и условия нормальной разрешимости. Линейно независимые решения однородных союзных уравнений. Индекс линейного оператора. Операторы с нулевым индексом (операторы Фредгольма). Теорема о возмущении индекса линейного оператора.

Тема 6. Теория потенциала

домашнее задание , примерные вопросы:

Гармонические функции и их свойства. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Граничные задачи для уравнения Лапласа (задача Дирихле и задача Неймана, внешние и внутренние задачи). Теорема Грина. Принцип максимума. Единственность решения граничных задач. Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя. Существование решения граничных задач . Случай, когда нарушается гладкость границы области.

Тема 7. Сингулярные интегральные уравнения

контрольная точка , примерные вопросы:

Непрерывность комплекснозначной функции по Гельдеру. Свойства оператора вложения. Интегральный оператор Коши с непрерывной плотностью. Формулы Сохоцкого. Краевая задача Римана для кусочно аналитических функций. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, замкнутый контур и разомкнутый контур. Связь между интегралом Коши и логарифмическим потенциалом.

Тема 8. Пространства Соболева

домашнее задание , примерные вопросы:

Пространства Соболева H^r для функций на отрезке. Нормы в пространствах Соболева. Свойства линейных функционалов в пространстве L_2 . Пространства Соболева H^r для функций на гладкой дуге. Слабые решения граничных задач для линейных дифференциальных уравнений. Слабая задача Дирихле и слабая задача Неймана. Свойства логарифмических потенциалов простого и двойного слоя.

Тема 9. Аппроксимация вырожденными ядрами

домашнее задание , примерные вопросы:

Аппроксимация операторов. Принцип равномерной ограниченности. Коллективно компактные операторы. Аппроксимация и поточечная сходимости. Метод последовательных приближений. Теорема о сходимости. Вырожденные операторы и вырожденные ядра. Интерполяция. Тригонометрическая интерполяция. Аппроксимация вырожденными ядрами. Задачи и примеры.

Тема 10. Квадратурные методы

контрольная работа , примерные вопросы:

Численное интегрирование, квадратурные формулы и их погрешность. Метод механических квадратур (метод Нистрема). Численные примеры. Интегральные уравнения со слабо сингулярными ядрами. Аппроксимация в пространствах Соболева, метод Нистрема. Проекционные методы. Метод коллокаций. Метод коллокаций для интегральных уравнений первого рода. Метод Галеркина.

Итоговая форма контроля

экзамен (в 5 семестре)

Примерные вопросы к итоговой форме контроля

Примерные вопросы для экзамена:

1. Сходимость и непрерывность.
2. Полнота.
3. Компактность.
4. Скалярное произведение.
5. Наилучшая аппроксимация
6. Ограниченные операторы.
7. Интегральные операторы.
8. Ряды Неймана.
9. Компактные операторы
10. Билинейные и полуторалинейные формы.
11. Альтернатива Фредгольма.
12. Краевые задачи для дифференциальных уравнений
13. Билинейные и полуторалинейные формы.
14. Альтернатива Фредгольма.
15. Краевые задачи для дифференциальных уравнений
16. Регуляризаторы.
17. Нормальная разрешимость.
18. Индекс
19. Гармонические функции.
20. Единственность решения граничных задач.
21. Поверхностные потенциалы.
22. Существование решения граничных задач
23. Интегральное уравнение с ядром Коши.
24. Интеграл Коши и логарифмический потенциал

25. Пространства H_r 0,2 и $H_r(\Gamma)$.
26. Слабые решения граничных задач
27. Вырожденные операторы и вырожденные ядра.
28. Тригонометрическая интерполяция
29. Численное интегрирование.
30. Метод механических квадратур.
31. Слабо сингулярные ядра.
32. Аппроксимация в пространствах Соболева

7.1. Основная литература:

1. Плещинский Н.Б. Прикладной функциональный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.Б. Плещинский. - Электрон. дан. - Казань: Казан. ун-т, 2018 - 80 с. - Режим доступа: https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F_297754050/afa18a.pdf
2. Лесин В.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие /В.В. Лесин. - М.: КУРС: ИНФРА-М, 2017. - 240 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/520539>
3. Новак Е. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения: Учебное пособие / Новак Е., Рязанова Т.В., Новак И., - 2-е изд., стер. - М.:Флинта, Изд-во Урал. ун-та, 2017. - 111 с. ISBN 978-5-9765-3188-8 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/951007>

7.2. Дополнительная литература:

1. Савенкова Н. П. Численные методы в математическом моделировании: Уч. пос./ Н.П. Савенкова и др. - 2 изд., исп. и доп. - М.: АРГАМАК-МЕДИА: ИНФРА-М, 2014. - 176 с. Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=455188>
2. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : учебник / В.И. Арнольд. ? Электрон. дан. ? Москва : МЦНМО, 2012. ? 341 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/56392>
3. Бибиков, Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю.Н. Бибиков. ? Электрон. дан. ? Санкт-Петербург : Лань, 2011. ? 304 с. ? Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/1542>

7.3. Интернет-ресурсы:

- Линейные операторы - www.alleng.ru/d/math/math207.htm
Линейные операторы - www.alleng.ru/d/math/math207.htm
Линейные операторы - www.alleng.ru/d/math/math207.htm
Линейные операторы - www.alleng.ru/d/math/math207.htm
Линейные операторы - www.alleng.ru/d/math/math207.htm

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)

Освоение дисциплины "Линейные операторы и операторные уравнения" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен студентам. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) нового поколения.

Лекции и лабораторные занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 01.03.04 "Прикладная математика" и профилю подготовки Математическое моделирование .

Автор(ы):

Плещинский Н.Б. _____

"__" _____ 201__ г.

Рецензент(ы):

Бахтиева Л.У. _____

"__" _____ 201__ г.